UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL : ANALYSE HILBERTIENNE, 2015-2016
DEVOIR MAISON 1 — À RENDRE LE 7 MARS 2016

PASCAL J. THOMAS

Problème 1

On pose $G(x) := e^{-\pi x^2}$ (fonction gaussienne).

1) Montrer que $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ en montrant par récurrence que $G^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-\pi x^2}$, où P_k est un polynôme de degré $\leq k$.

2) On pose $F(\xi) := \hat{G}(\xi)$. En dérivant sous l'intégrale, montrer que $F'(\xi) = i\widehat{G'}(\xi)$, et en utilisant un théorème du cours, montrer que $F'(\xi) = -2\pi\xi F(\xi)$.

3) On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$.

Résoudre l'équation différentielle satisfaite par F et en déduire que $\hat{G}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ (autrement dit, la gaussienne est sa propre transformée de Fourier).

Problème 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $c_n := \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$. Montrer que $c_n \geq 1/(n+1)$.
Indication : $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$.

2) On pose

$$L_{1/n}(x) := \frac{(1-x^2)^n}{c_n} \text{ pour } |x| \leq 1, \quad L_{1/n}(x) := 0 \text{ pour } |x| \geq 1.$$

Montrer que $(L_{1/n})_{1/n}$ définit une identité approchée.

Attention : ici, il faut remplacer les δ de la définition habituelle par $1/n$. Mais on a les mêmes propriétés que celles qu'on a vues dans le cours.

3) a) On suppose que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer en utilisant un résultat du cours que $L_{1/n} * f$ converge uniformément vers f.

b) Montrer que $L_{1/n} * f$ coïncide avec une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Indication : montrer qu'on peut écrire $L_{1/n}(x-t) = \sum_{j=0}^{2n} a_j(t)x^j$, où les a_j sont des polynômes (en t) qu'on n'a pas besoin de calculer explicitement.

4) a) Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Montrer que toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[a,b]$, est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a,b]$. Indication : faire un changement de variable affine.

b) Montrer le Théorème de Weierstrass : toute fonction h continue sur $[a,b]$ est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de (restrictions à $[a,b]$) de fonctions polynomiales.

Indication : prolonger h en une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[a-1, b+1]$.