UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL : ANALYSE HILBERTIENNE
DEVOIR MAISON 1 — À RENDRE LE 25 FÉVRIER 2015

PASCAL J. THOMAS

On note indifféremment $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour la transformée de Fourier d'une fonction.

On cherche à déterminer les fonctions propres pour la transformation de Fourier, c'est-à-dire les fonctions f, non identiquement nulles, telles que $\hat{f} = \lambda f$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

On admet la formule d'inversion de Fourier, que nous allons bientôt démontrer : si f et $\hat{f}$ sont toutes les deux absolument intégrables (en particulier si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

(1) On suppose que f est paire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}(f + \mathcal{F}(f))$ et $\mathcal{F}(f - \mathcal{F}(f))$.

(2) Soit f une fonction telle que f et $\hat{f}$ sont toutes les deux absolument intégrables. On pose $\breve{f}(x) := f(-x)$. Rappeler ce qu'est $\mathcal{F}(\breve{f})$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$. Calculer $\mathcal{F}^2(f) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))$, puis $\mathcal{F}^4(f)$. Si $\mathcal{F}(f) = \lambda f$, quelles peuvent être les valeurs de λ ?

(3) On suppose que f est impaire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer que $f + i\hat{f}$ et $f - i\hat{f}$ sont des fonctions propres.

(4) On suppose que f est paire et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{F}(f) = \lambda f$. Montrer que $\lambda \in \{+1, -1\}$.

Que se passe-t-il si f est impaire et propre ?

(5) Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Décomposer h en la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire. Montrer que cette décomposition est unique. Décomposer h en une somme de quatre fonctions propres pour la transformée de Fourier (ou nulles). On utilisera $\mathcal{F}^i(h)$, $0 \le i \le 3$, où $\mathcal{F}^0$ représente l'identité.

(6) Exemple: on veut déterminer les fonctions propres de la forme $f(x) = \alpha_1 e^{-\pi\delta_1 x^2} + \alpha_2 e^{-\pi\delta_2 x^2}$, où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ et $\delta_1, \delta_2 > 0$.

Nous allons voir en cours que si $G(x) := e^{-\pi x^2}$, alors $G \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\widehat{G}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

a) Calculer $\mathcal{F}(e^{-\pi\delta x^2})$, pour $\delta > 0$.

b) Démontrer que des gaussiennes avec des coefficients différents sont indépendantes, c'est-à-dire : si $\delta_k \neq \delta_j$ pour $j \neq k$, $1 \le j, k \le N$, alors si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k e^{-\pi\delta_k x^2} = 0$, on a nécessairement $\lambda_k = 0$ pour tout k.

Indication : on peut supposer que $\delta_1 < \delta_j$, pour tout $j \ge 2$, et comparer les termes de la somme quand $x \to +\infty$.

c) Déterminer les couples (α_1, α_2) tels que $\alpha_1 e^{-\pi\delta_1 x^2} + \alpha_2 e^{-\pi\delta_2 x^2}$ définisse une fonction propre pour la transformée de Fourier.