UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL : ANALYSE HILBERTIENNE
DEVOIR MAISON 2 — À RENDRE LE 1ER AVRIL 2015

PASCAL J. THOMAS

On rappelle que la transformation de Fourier d'une fonction f est notée indifféremment $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ et est définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx.$$

Problème 1.

On suppose que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On va montrer que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(1) Pourquoi $f * g$ est-elle indéfiniment dérivable ? (Utiliser un théorème du cours)

(2) En utilisant la majoration de g, c'est-à-dire que pour tout n, il existe B_n tel que $|g(t)| \leq B_n(1 + |t|)^{-n}$, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $A_m > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x^m g(x - y)| \leq A_m(1 + |y|)^m$.
(a) Premier cas : $|x| \leq 2|y|$. Indication : ici, il suffit d'utiliser le fait que g est bornée.
(b) Deuxième cas : $|x| \geq 2|y|$. On remarquera que $|x - y| \geq |y|$.

(3) En déduire en utilisant les propriétés de f que $x^m f * g(x)$ est une fonction bornée pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(4) Expliquer pourquoi on peut utiliser la question précédente pour montrer que $x^m \frac{d^k}{dx^k} (f * g) (x)$ est une fonction bornée pour tous $m, k \in \mathbb{N}$. Conclure.

Remarque : c'est l'exercice 2.3 de la Feuille de TD 3.

Problème 2.

(1) Pour $L > 0$, on pose $p_L(x) := \frac{1}{2L}\chi_{[-L,L]}(x)$ (fonction "porte").

- Calculer $\hat{p}_L(\xi)$.
- Soit g une fonction de la classe Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Exprimer la valeur de la convolution $g * p_L(x)$ sous forme de la moyenne de g sur un certain intervalle.
- Montrer que $\hat{g}\,\hat{p}_L$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et donner (sans calculs) la valeur de $\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}\hat{p}_L)(x)$, où $\mathcal{F}^{-1}$ est la transformation de Fourier inverse.

(2) Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Calculer l'unique solution de l'équation différentielle $v"(t) = -\omega^2 v(t)$ qui vérifie $v(0) = a_0$, $v'(0) = a_1$.

(3) On suppose que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et que $x \mapsto u(x,t)$ est dans la classe de Schwartz, uniformément en t, c'est-à-dire

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \exists C_{n,k} : \text{ pour tous } x, t \in \mathbb{R}, \left| x^n \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq C_{n,k}.$$

On pose $\hat{u}(\xi, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} u(x,t) dx$.

- Montrer que $\hat{u}(., t)$ est dans la classe de Schwartz, uniformément en t.
- Montrer que $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}$ existent et donner leur expression comme transformées de Fourier de dérivées partielles de u.

  On peut utiliser le cas particulier suivant du théorème de dérivation des intégrales à paramètres : si $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, que $F(t, \dot{})$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout t, et qu'il existe une fonction g absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial}{\partial t} F(t,x) \right| \leq g(x)$, alors $\int_{\mathbb{R}} F(t,x) dx$ est dérivable et
$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} F(t,x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} F(t,x) dx.$$

(4) On suppose que u satisfait *l'équation des ondes* : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ pour tous $x, t \in \mathbb{R}$.

- Montrer que
$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t).$$
- On suppose que $f_0, f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que u satisfait les conditions initiales $u(x, 0) = f_0(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x)$.
  Donner l'expression de $\hat{u}(\xi, t)$ en fonction de $\hat{f}_0(\xi)$ et $\hat{f}_1(\xi)$.
- Montrer que
$$u(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_0(\xi) \cos(2\pi \xi t) e^{2\pi i x \xi} d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(\xi) \frac{\sin(2\pi \xi t)}{2\pi \xi} e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

(5) On va retrouver notre solution de l'équation des ondes sous une forme plus élémentaire.

- En exprimant le cosinus en termes d'exponentielles complexes, montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_0(\xi) \cos(2\pi \xi t) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{1}{2} \left(f_0(x+t) + f_0(x-t) \right).$$
- En utilisant la question (1), montrer que, pour $t > 0$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_1(\xi) \frac{\sin(2\pi \xi t)}{2\pi \xi} e^{2\pi i x \xi} = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f_1(s) ds.$$