7

(3) Rappeler la définition d'une identité approchée (sur $\mathbb{R}$).
Montrer que la famille de fonctions $(f_\delta)_{\delta>0}$ définie par

$$f_\delta(x) := \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{|x|}{\delta}}$$

constitue une identité approchée.

(1) $f_\delta \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\delta = 1$

(3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \int_{|x|>\varepsilon} f_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

- $f_\delta \geq 0$ clair
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{|x|}{\delta}} dx = \frac{1}{\delta} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\delta}} dx \qquad u = \frac{x}{\delta}$

  $= \int_0^\infty e^{-u} du = \left[-e^{-u}\right]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$
- $\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{|x|}{\delta}} dx = \frac{1}{\delta} \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{x}{\delta}} dx \qquad u = \frac{x}{\delta}$

  $= \int_{\frac{\varepsilon}{\delta}}^\infty e^{-u} du \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$ car $\frac{\varepsilon}{\delta} \to +\infty.$