UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
ANALYSE HILBERTIENNE, TEST 1, MARDI 9 FÉVRIER 2016

PASCAL J. THOMAS

Ce sujet comporte deux pages. Les trois questions sont indépendantes. On est prié d'écrire toutes les réponses sur cette feuille.

NOM :

5

(1) On suppose que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et trouver $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|$ (démonstration en une ligne).

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx.$$

En fait on a seulement un majorant de $|\hat{f}(\xi)|$

Si $f(x) \geq 0$, c'est $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \hat{f}(0)$.

8

(2) On pose $f(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$ pour $\pi < x < 2\pi$, qu'on prolonge pour être périodique de période 2π.

Calculer $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$.

En déduire $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (indication : Parseval).

$n \neq 0$: $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-1}{in} e^{-inx} \right]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{n} \cdot \left((-1)^n - 1 \right)$. $\quad c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1\, dx = \frac{1}{2}$

$c_n(f) = 0$ si n pair

$c_n(f) = \frac{-i}{\pi n}$ si n impair

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{4} + 2 \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

Donc

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2} \pi^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2}{8}$$