UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
CONTRÔLE TERMINAL, PREMIÈRE SESSION
MARDI 7 MAI 2019

Ce sujet comporte deux pages, et deux problèmes indépendants.
Durée de l'épreuve : **deux heures.**

I.

Soit E et F deux espaces euclidiens de dimension finie. Si x et y sont des vecteurs de E, on note $(x|y)$ le produit scalaire dans E, et si x et y sont des vecteurs de F, on note $(x|y)$ le produit scalaire dans F.

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $u^* : F \longrightarrow E$ l'adjointe de u relativement à ces produits scalaires.

1. Montrer que $u^* \circ u$ est un endomorphisme diagonalisable de E et que ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

2. En calculant $(u(x)|u(x))$ de deux façons, montrer que les valeurs propres de $u^* \circ u$ sont positives ou nulles.

Si λ est une valeur propre de $u^* \circ u$, on désigne par E_λ le sous-espace propre correspondant. Que peut-on dire de $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ quand $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$?

3. En déduire que l'endomorphisme $u \circ u^*$ de F est diagonalisable, que ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Si μ est une valeur propre de $u \circ u^*$, on désigne par F_μ le sous-espace propre correspondant.

Montrer que pour tout λ valeur propre de $u^* \circ u$, $u\,(E_\lambda) \subset F_\lambda$.

5. On note $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_h,\ h \geq 0$ (resp. $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k,\ k \geq 0$) les valeurs propres *non nulles* de $u^* \circ u$ (resp. $u \circ u^*$).

Montrer que pour tout $i \in [1, h]$, et pour tout $x \in E_{\lambda_i} \setminus \{0\}$, $u(x) \neq 0$. En déduire que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_h\} \subset \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$, et que $\dim E_{\lambda_i} \leq \dim F_{\lambda_i}$, pour $1 \leq i \leq h$.

6. Montrer que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_h) = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$, et que u induit un isomorphisme u_i de E_{λ_i} sur F_{λ_i}.

II.

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire euclidien usuel, on considère pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la forme quadratique q_α donnée par la matrice

$$M_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le rang de q_α en fonction de α.

2. Décomposer q_α en carrés par la méthode de Gauss. Discuter soigneusement les cas où des coefficients d'un carré s'annulent.

Retrouver ainsi le résultat de la question 1, et déterminer la signature de q_α sur chacun des intervalles de $\mathbb{R}$ (éventuellement réduits à un point) sur lequel son rang est constant.

3. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M_α. (Indication : le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre ; quelle est la valeur propre associée ?)

En déduire à nouveau les résultats sur la signature de q_α.

4. Trouver une base de diagonalisation orthonormée de M_α.

5. Pour $\alpha = -1$, déterminer les vecteurs isotropes du plan $\{x_2 = x_3\}$.