UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
TD 8 - ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES ET ORTHOGONAUX

15. Endomorphismes symétriques et orthogonaux

15.1. **(B)** Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après quel théorème sait-on qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et une matrice orthogonale $P \in O(3,\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$? Trouver explicitement de telles matrices.

15.2. **(B)** On considère dans $\mathbb{R}^3$ la quadrique d'équation $(x+y)(y-z)+3x-5y=0$. Trouver son centre de symétrie et ses axes principaux, en donner une équation dans des coordonnées rectangulaires adaptées et déterminer sa nature.

15.3. **(B)** a) Soit p une projection, c'est-à-dire $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$. Montrer que p est une projection orthogonale, c'est-à-dire telle que $p = p^*$, si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

b) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $pq = qp$;

(2) p et q admettent une base commune de diagonalisation;

(3) pq est une projection.

Indication : pour montrer que (3) implique (1), commencer par montrer que pq est une projection orthogonale.

15.4. On se donne un $\mathbb{R}$-plan hyperbolique. Déterminer toutes les bijections linéaires qui conservent la forme quadratique.

15.5. **(B)** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée q (Q étant la forme bilinéaire symétrique associée). On note u^* l'adjoint d'un endomorphisme u par rapport à Q. On suppose que $u^* = u^{-1}$ (c'est-à-dire que u est orthogonal) et on pose $\sigma := (Id-u)(Id+u)^{-1}$ (transformation de Cayley).

a) Montrer que $\sigma^* = -\sigma$ et que $\sigma + Id$ est bijective.

b) Montrer que $u = (Id-\sigma)(Id+\sigma)^{-1}$.

c) En déduire que si $n = \dim E$ est impaire, toute transformation orthogonale de déterminant 1 admet un vecteur propre pour la valeur propre 1.

15.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'un produit scalaire. On note u^* l'adjoint d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{A} := \{u \in \mathcal{L}(E) : u = uu^*u\}$.

a) Montrer que $u \in \mathcal{A}$ si et seulement si u^*u est une projection orthogonale.

b) Montrer que $u \in \mathcal{A}$ si et seulement si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

c) Réciproquement, si $u \in \mathcal{A}$ et $\|u(x)\| = \|x\|$, alors $x \in (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

15.7. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique $n \times n$ réelle, associée à une forme quadratique q. On note $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{k} a_{j,j} \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$. Indications : (i) dans un sous espace E de dimension k, montrer que pour toute $\{v_1, \ldots, v_k\}$ une base de E orthonormée au sens du produit scalaire euclidien standard, $\sum_{j=1}^{k} q(v_j)$ a la même valeur;

(ii) montrez par récurrence sur k que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} q(v_j) : \{v_1, \ldots, v_k\} \text{ b.o.n. de } E, \dim E = k \right\}.$$

Pour passer au rang $k+1$, choisir une base avec $v_{k+1} \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle^{\perp}$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans tout ce qui suit, on considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)$. On note $\|x\|^2 = (x, x)$.

15.8. **(B)** On rappelle que la différentielle d'une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ en un point a est définie comme $\varphi \in E^{\vee}$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|), \forall h \in E.$$

On note $\varphi = Df(a)$. L'espace vectoriel tangent en un point a de l'ensemble $\{f(x) = c\}$ est défini comme $\ker Df(a)$.

On considère une forme quadratique q de forme bilinéaire symmétrique associée B. Montrer que l'espace tangent à $\{q(x) = c\}$ au point a est l'orthogonal de a au sens de B.

15.9. Montrer que si u est une application de E dans E qui préserve le produit scalaire, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in E$, $(u(x), u(y)) = (x, y)$, alors u est linéaire, et donc u est dans le groupe orthogonal de E.

Indications : montrer que l'image d'une base orthonormée est orthornormée. Puis exprimer x et $u(x)$ dans ces bases respectives.

15.10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est normal (c'est-à-dire que $uu^* = u^*u$) si et seulement si il existe un polynôme P (de degré inférieur ou égal à $n-1$) tel que $u^* = P(u)$.

Indication : pour montrer que la condition est nécessaire, utiliser l'interpolation de Lagrange : si $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres réels distincts, $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $P(z_j) = w_j$, $1 \leq j \leq n$.

15.11. On veut calculer $\inf_{a \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_j t^j\right)^2 dt$.

a) On rappelle que sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $(P, Q) := \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire.

Montrer que le problème posé équivaut à calculer la projection du polynôme constant 1 sur le sous-espace des polynômes qui s'annulent en 0, et donc à trouver un polynôme Q tel que $Q(0) = 0$ et $(Q, X^k) = (1, X^k)$ pour $1 \leq k \leq n$.

b) Résoudre le système linéaire obtenu à partir de la question a). Pour ce faire, on pourra remarquer que $\frac{1}{t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+t}$ est le développement en éléments simples d'une fraction rationnelle qui s'annule aux points $h \in \mathbb{N}$, $2 \leq h \leq n+1$.