UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
TD 5 - EXPONENTIELLES DE MATRICES

PASCAL J. THOMAS

9. Exponentielles de matrices

Ce qui suit est un petit résumé de cours, avec des exercices dedans (vers la fin).

9.1. **Topologie sur les matrices.** Nous aurons besoin de prendre des limites de matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Dans ce but, nous allons définir une norme sur ces matrices. Pour un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$\|x\|^2 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2.$$

On remarque que $\max_j |x_j| \le \|x\| \le \sqrt{n} \max_j |x_j|$.

Définition 9.1. Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| := \sup \left\{ \|Mx\| : \|x\| \le 1 \right\}.$$

On remarque que si $M = (m_{jk})_{1\le j,k\le n}$, $\|M\| \ge \max_{1\le j,k\le n} |m_{jk}|$,

$$\|M\| \le \sqrt{n} \sup \left\{ \max_j \left| \sum_k m_{jk} x_k \right| : \|x\| = 1 \right\} \le \sqrt{n} \max_j \sum_k |m_{jk}| \le n^{3/2} \max_{1\le j,k\le n} |m_{jk}|.$$

Ces inégalités ne sont pas les meilleures, mais elle suffisent pour montrer que si on a une suite de matrices $M^{(m)}$, alors $\lim_m M^{(m)} = M$ si et seulement si pour chaque couple (j,k), $\lim_m m_{jk}^{(m)} = m_{jk}$ (avec les notations évidentes).

La définition 9.1 a une conséquence importante.

Lemme 9.2. Pour toutes $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, $\|MN\| \le \|M\| \cdot \|N\|$.

Démonstration. Soit x tel que $\|x\| \le 1$. Alors $\|Nx\| \le \|N\|$, donc $\|MNx\| = \|N\| \left\| M \left(\frac{1}{\|N\|} Nx \right) \right\| \le \|N\| \|M\|$. $\square$

En particulier, $\|M^m\| \le \|M\|^m$ pour tout $m \ge 0$, et si $\lim_m M^{(m)} = M$, alors $\lim_m NM^{(m)} = NM$ (et l'énoncé similaire en échangeant l'ordre du produit).

9.2. **Exponentielle de matrices.**

Définition 9.3. Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on pose

$$e^M = \exp M := \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j.$$

Il faut montrer que cette suite de sommes partielles converge. Cela suit du fait que pour $k \leq m$,

$$\left\| \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{j!} M^j \right\| \leq \sum_{j=k}^{m} \frac{1}{j!} \|M\|^j,$$

qui peut être rendu arbitrairement petit pour k assez grand car la série numérique $\sum \frac{1}{j!} t^j$ est absolument convergente pour tout $t \geq 0$ (ici on prend $t = \|M\|$). Donc on a une suite de Cauchy de matrices, donc chaque entrée est une suite de Cauchy complexe, donc convergente, donc la suite de matrices converge aussi.

L'application exponentielle sur les matrices a deux propriétés essentielles.

Proposition 9.4. Si $P \in M_n(\mathbb{C})$ est inversible, alors $\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}(\exp M)P$.

Démonstration. Remarquez que $(P^{-1}MP)^2 = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}M^2P$. On montre facilement de la même façon, par récurrence, que $(P^{-1}MP)^j = P^{-1}M^jP$ pour tout j. Donc pour tout m

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} (P^{-1}MP)^j = P^{-1} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j \right) P.$$

En passant à la limite en m des deux côtés, on trouve le résultat. □

Proposition 9.5. Si $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, et $MN = NM$, alors $\exp(M+N) = \exp M \exp N = \exp N \exp M$.

Démonstration. La démonstration repose sur les mêmes identités algébriques que dans le cas d'exponentielles de nombres (réels ou complexes). En détail :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j \right) \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} N^j \right) &= \sum_{0 \leq j,k \leq m} \frac{M^k N^j}{k! j!} \\ &= \sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{s} \frac{M^k N^{s-k}}{k!(s-k)!} + \sum_{0 \leq j,k \leq m; j+k \geq m+1} \frac{M^k N^j}{k! j!}.\end{aligned}$$

Ici nous utilisons la commutativité, pour avoir la formule du binôme :

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{k=0}^{s} \frac{M^k N^{s-k}}{k!(s-k)!} + \sum_{0 \leq j,k \leq m; j+k \geq m+1} \frac{M^k N^j}{k! j!} = \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} (M+N)^s + R(m, M, N).$$

Mais on peut majorer la norme du reste :

$$\|R(m, M, N)\| \leq \sum_{m+1 \leq j+k \leq 2m} \frac{\|M\|^k \|N\|^j}{k! j!} = \sum_{m+1 \leq s \leq 2m} \frac{1}{s!} (\|M\| + \|N\|)^s \to 0 \text{ quand } m \to \infty.$$

Finalement, en passant à la limite en m dans

$$\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} M^j \right) \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} N^j \right) = \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} (M+N)^s + R(m, M, N),$$

on trouve la formule voulue. □

Attention, l'hypothèse de commutativité est indispensable.

9.1. Exercice : calculer e^M, e^N et e^{M+N} quand

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indications : il faudra utiliser le fait que M et N sont nilpotentes, et que $(M+N)^2 = I$.

9.3. **Calcul d'exponentielles de matrices.** On utilise les propriétés ci-dessus et la décomposition dite de Dunford.

Etant donnée une matrice M, on peut trouver P inversible, D diagonale et N nilpotente telles que $P^{-1}MP = D+N$, et $DN = ND$. Il s'en suit que $\exp(D+N) = e^D(I + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1})$, où m est l'ordre de nilpotence de N. Le terme e^D se calcule aisément en prenant l'exponentielle de tous les termes diagonaux. Enfin, $e^M = P(\exp(D+N))P^{-1}$.

9.4. **Application aux systèmes d'équations différentielles.**

Nous commençons par le cas des équations homogènes.

Soit $U :]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}^n$ une application différentiable, que l'on écrit comme un vecteur colonne

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Théorème 9.6. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $0 \in]a,b[$. Toutes les solutions du système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants $U'(t) = MU(t)$ sont données par $U(t) = e^{tM}U(0)$.*

Nous omettons la démonstration, qui est formellement très semblable à celle du cas scalaire.

9.2. Exercice : Traiter le cas $n = 2$, $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

9.3. Exercice : Equation différentielle (scalaire) linéaire à coefficients constants, d'ordre n, $u^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j u^{(j)} = 0$.

On pose alors $u_1 := u$, et en général $u_j := u^{(j-1)}$, $1 \leq j \leq n$.

(a) Transformer l'équation en un système différentiel d'ordre 1 pour la fonction à valeurs vectorielles $(u_j(t))_{1 \leq j \leq n}$ en écrivant u_j' en fonction des u_k, pour $1 \leq k \leq n$. La matrice M de ce système sera la transposée d'une matrice compagnon. Donner son polynôme minimal.

(b) A quoi correspond ici le polynôme caractéristique de l'équation ?

(c) On suppose que λ est une valeur propre de multiplicité algébrique $m > 1$. Montrer que $\dim E_\lambda = 1$. Indication : sinon, on peut trouver un polynôme annulateur de M de degré plus petit que n. Donner la forme de Jordan de M.

Montrer que les valeurs propres multiples correspondent à des solutions "résonnantes" : les solutions contiendront des exponentielles multipliées par des puissances de la variable.

(d) Traiter le cas $u'' - 2u' + u = 0$.

9.4. Exercice : Appliquer cette méthode au système d'équation décrivant deux oscillateurs harmoniques couplés :

$$\begin{aligned} u_1'' &= -ku_1 + k_0(u_2 - u_1) \\ u_2'' &= -ku_2 - k_0(u_2 - u_1) \end{aligned}$$

(Vous devrez arriver à une matrice 4×4).

Le cas des équations avec second membre se traite par la méthode dite de variation de la constante, brièvement : si $U'(t) = MU(t) + G(t)$, où G est une fonction donnée à valeurs vectorielles, c'est équivalent à $(e^{-tM}U(t))' = e^{-tM}G(t)$. Si on peut trouver une primitive du membre de droite, on obtient une solution particulière de l'équation.