UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2017-18
TD 1 - SOUS-ESPACES STABLES D'ENDOMORPHISMES

Les exercices marqués (B) sont des exercices de base, que vous devez savoir faire et sur lesquels vous pourrez être évalués.

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel sur un corps K. Les endomorphismes de E sont les applications linéaires de E dans lui-même.

1. Formes linéaires, Endomorphismes

1.1. **(B)** On appelle *hyperplan* un sous-espace vectoriel H de E tel que il existe une droite L (sous-espace vectoriel de dimension 1) telle que $H \oplus L = E$.

a) Soit α une forme linéaire. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\alpha \neq 0$,
(2) α est surjective,
(3) le noyau $\operatorname{Ker} \alpha$ est un hyperplan.

b) Si E est de dimension finie m, montrer que H est un hyperplan si et seulement si H est de dimension $m-1$. Soit $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des hyperplans de E et $\mathcal{L}(E^\vee)$ l'ensemble des droites de $E^\vee$, l'espace dual de E. Montrer que l'application $\alpha \mapsto \operatorname{Ker}(\alpha)$ induit une bijection de $\mathcal{L}(E^\vee)$ sur $\mathcal{H}(E)$.

1.2. Soit A un sous-ensemble de E, un K-espace vectoriel de dimension finie. On pose

$$A^{an} := \{\alpha \in E^\vee : \forall x \in A, \alpha(x) = 0\}.$$

a) Montrer que A^{an} est un K-sous-espace vectoriel de $E^\vee$.

b) Si V_1 et V_2 sont des K-sous-espaces vectoriels de E, montrer que

$$(V_1 + V_2)^{an} = V_1^{an} \cap V_2^{an}, \quad (V_1 \cap V_2)^{an} = V_1^{an} + V_2^{an}.$$

Qu'en déduit-on si V_1 et V_2 sont en somme directe ?

c) Montrer que $\cap_{\alpha \in A^{an}} \operatorname{Ker} \alpha$ est le sous-espace vectoriel engendré par A (c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel contenant A). Indication : si $V \subsetneq E$ est un sous-espace vectoriel, et $x \notin V$, montrer qu'on peut trouver une forme linéaire α_x telle que $\alpha_x(x) = 1$.

1.3. **(B)** Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel de dimension quelconque. On suppose que $u^2 = u$. On dit dans ce cas que u est une *projection.*

a) Montrer que les valeurs propres possibles de u sont 0 ou 1.

b) Montrer que tout $x \in E$ peut s'écrire comme somme de deux vecteurs propres ou nuls. Indication : montrer que $x - u(x) \in \operatorname{Ker} u$.

c) Conclure que u est diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base constituée de vecteurs propres). Si $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim \operatorname{Im} u = r$ (rang de u), donner une forme diagonale possible de la matrice de u (dans une base appropriée).

1.4. a) **(B)** Soit E un espace vectoriel de dimension d, avec $d \geq 2$. Montrer qu'il existe deux endomorphismes f, g, tels que $f \circ g \neq g \circ f$.

Méthode : on rappelle qu'un endomorphisme est déterminé par son image sur une base. Soit $\{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de E. Supposons d'abord $d = 2$. Soit f la projection sur la droite Ke_1, parallèlement à la droite Ke_2. Déterminer les endomorphismes g qui commutent avec f. Conclure. Pour $d > 2$, construire un exemple qui vérifie $f(e_j) = g(e_j) = e_j$, pour tout $j \geq 3$.

b) On suppose $E \neq 0$. Montrer qu'un endomorphisme f commute avec tous les endomorphismes $g \in \operatorname{End} E$ (on dit alors que f est dans le *centre* de $\operatorname{End} E$) si et seulement si il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda Id_E$. On appelle un tel f une homothétie.

Indications : s'il existe $u \neq 0$ tel que $f(u)$ ne soit pas colinéaire à u, construire un endomorphisme g tel que $g(f(u)) \neq 0$ et $g(u) = 0$. En déduire que pour f dans le centre et $u \in E$, $f(u) = \lambda_u u$ pour un certain $\lambda_u \in K$. Soient deux vecteurs u, v non colinéaires. Si $\lambda_u \neq \lambda_v$, considérer une application g telle que $g(\text{Vect }(u, v)) \subset \text{Vect }(u, v)$, dans l'esprit de la question a).

2. Sous-espaces stables

Un K-sous espace vectoriel V de E est dit *stable* pour un endomorphisme u de E si et seulement si $u(V) \subset V$.

2.1. **(B)** Soit u un endomorphisme de E. On rappelle que $\operatorname{Im} u := u(E) := \{y \in E : \exists x \in E, u(x) = y\}$. Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des K-sous espaces vectoriels de E stables pour u.

2.2. **(B)** Soit u un endomorphisme de E qui est *nilpotent,* c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Montrer que la seule valeur propre possible de u est 0.

2.3. Soient E de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

Donner un exemple en dimension 2 où la propriété $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ n'est pas satisfaite.

2.4. Soit $E = K_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\dim E = n + 1$. On considère l'endomorphisme u de E donné par $u(P) = P'$ (le polynôme dérivé), où, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $P'(X) := \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

b) Montrer que si $n \geq 1$, u n'est pas diagonalisable.

c) Montrer que pour tout $m \leq n$, $K_m[X]$ est un sous-espace stable pour u.

d) Trouver une base $(e_j)_{0 \leq j \leq n}$ de E telle que $u(e_j) = e_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq n$ et $u(e_0) = 0$.

2.5. Soient E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$, $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$.

b) Montrer que $\operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$. Montrer qu'il existe un entier $k_0 \leq n$ tel que $\operatorname{Im} u^{k_0+1} = \operatorname{Im} u^{k_0}$. On prend le plus petit k_0 qui vérifie cette propriété. Montrer qu'alors, pour tout $k \geq k_0$, $\operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k$.