UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2017-18
TD 3 - ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES OU NON

PASCAL J. THOMAS

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, E est un espace vectoriel sur un corps K et u est un endomorphisme de E.

5. Exemples de sous-espaces stables

5.1. On suppose que $\mathrm{Im}(f-\lambda I)+\mathrm{Im}(f-\mu I) \subsetneq E$. Montrer que $\lambda = \mu$.
Indication : considérer l'image de E par l'application $(f-\lambda I)-(f-\mu I)$.
On peut aussi utiliser le Lemme des Noyaux.

5.2. Soit S un sous-espace vectoriel stable de E tel que $E = \operatorname{Ker} u \oplus S$. Alors $S = \operatorname{Im} u$.

5.3. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \operatorname{Ker} u^r \oplus \operatorname{Im} u^r$. Indication : vous pouvez utiliser le résultat des exercices 1.3 et 1.5.

5.4. On se donne f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, de dimension finie. A quelle condition une projection p vérifiera-t-elle $f \circ p = p \circ f$?
Indication : considérez les sous-espaces stables par f et par p.

6. Diagonalisabilité

6.1. On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $u \in \mathrm{End}(E)$ est diagonalisable si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel V stable par u, il existe F sous-espace stable par u tel que $V \oplus F = E$.

6.2.

6.3. On considère les endomorphismes u_1 de K^2 et et u_2, u_3 de K^3, donnés par les matrices (dans les bases canoniques):

$$M(u_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(u_2) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(u_3) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $K[u_1]$ et l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u_1. Mêmes questions pour u_2 et u_3.

6.4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension n, muni d'une base $e_1, \dots, e_n$. On rappelle qu'une *permutation* est une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. On rappelle qu'un *cycle* d'une permutation σ est un ensemble $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(x_j) = x_{j+1}$, $1 \le j \le k-1$, et $\sigma(x_k) = x_1$. Toute permutation s'écrit comme un produit de composition de ses restrictions à ses cycles (nécessairement disjoints), qui commutent entre elles.

Si σ est une permutation, on définit $u_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ par $u(e_j) := e_{\sigma(j)}$.

a) Si A est un cycle de σ, montrer que $E_A := \mathrm{Vect}\{e_j, j \in A\}$ est un sous-espace stable de u_σ. Si a est le cardinal de A, trouver le polynôme minimal de $u|_{E_A}$.

b) Montrer que E est somme directe des E_A, où A parcourt tous les cycles possibles de σ.

c) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors u_σ est diagonalisable.

d) Application : trouver le polynôme minimal et les valeurs propres de

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$