UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2017-18
TD 2 - POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

PASCAL J. THOMAS

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel sur un corps K.

3. Polynômes, rappels

3.1. Etant donnés deux polynômes non nuls $P_1, P_2 \in K[X]$, de degrés respectifs d_1, d_2, montrer qu'il existe deux polynômes uniques $Q, R \in K[X]$ avec $\deg(R) < d_2$ ou $R = 0$, et $P_1 = P_2 Q + R$. On parle de *division euclidienne* des polynômes, Q en est le quotient, R en est le reste ; vous l'avez vue dans le cas $K = \mathbb{C}$ en S1.

(Indication : si $d_2 > d_1$, la réponse est évidente, pourquoi ? Si $d_2 \leq d_1$, montrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que

$$\deg(P(X) - \alpha X^{d_1 - d_2} Q(X)) < d_1,$$

et se ramener par récurrence au cas $d_2 > d_1$.)

3.2. Un *idéal* de $K[X]$ est un sous groupe additif $I \subset K[X]$ qui vérifie par surcroît que :

$$\forall P \in K[X], Q \in I, PQ \in I.$$

a) Montrer que si $P \in K[X]$, l'ensemble $PK[X] := \{PQ, Q \in K[X]\}$ est un idéal. Un tel idéal est dit *idéal principal*.

b) Montrer que si I est un idéal et $P_1, P_2 \in I$, alors le reste R est dans I.

c) Soit I un idéal, $I \neq \{0\}$. Soit $P_0 \in I$ tel que

$$\deg(P_0) = \min \{\deg(P) : P \in I, P \neq 0\}.$$

Montrer que $I = P_0 K[X]$. Donc tout idéal de $K[X]$ est principal.

3.3. a) Soit I un idéal de $K[X]$. Montrer que $I = K[X]$ si et seulement si $1 \in I$.

b) Soient I, J deux idéaux de $K[X]$. Montrer que $I + J$ est un idéal de $K[X]$, où $I + J := \{P + Q : P \in I, Q \in J\}$.

c) Soient deux polynômes non nuls $P_1, P_2 \in K[X]$. Montrer que si Q est un diviseur de P_1, alors $P_1 K[X] \subset QK[X]$.

Soit D l'unique polynôme de coefficient de plus haut degré égal à 1 tel que

$$P_1 K[X] + P_2 K[X] = DK[X],$$

qui existe d'après la question précédente. Montrer que D est un diviseur commun de P_1 et P_2 de degré maximal. On appelle D le pgcd de P_1 et P_2.

En déduire qu'il existe des polynômes Q_1, Q_2 tels que

$$\text{pgcd}(P_1, P_2) = Q_1 P_1 + Q_2 P_2.$$

Ceci s'appelle l'identité de Bézout, que vous connaissez sans doute pour les entiers relatifs.

4. Polynômes annulateurs, minimaux, etc

Dans tout ce qui suit, u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur le corps K.

4.1. a) On suppose qu'il existe un polynôme P tel que $P(0) \neq 0$ et $P(u) = 0$. Montrer que u est inversible, et qu'on peut écrire son inverse sous la forme $Q(u)$, où Q est un polynôme.

b) Montrer que si il existe un endomorphisme $v \neq 0$ tel que $uv = 0$, alors u n'est pas inversible.

c) On note μ_u le polynôme minimal de u. Montrer que si u est inversible, alors $\mu_u(0) \neq 0$.

d) Déduire de ce qui précède que si u est inversible, son inverse s'exprime comme un polynôme en u (les coefficients du polynôme dépendent de u).

4.2. Soit E un espace vectoriel de base $e_1, \ldots, e_d$. On considère l'endomorphisme $\gamma \in \mathrm{End}(E)$ donné par $\gamma(e_j) = e_{j+1}$, $1 \leq j \leq d-1$, $\gamma(e_d) = e_1$.

a) Quel est le polynôme minimal de γ ?

b) On suppose que $K = \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs propres possibles de γ ?

c) Toujours pour $K = \mathbb{C}$, montrer que γ est diagonalisable (utiliser la question b) de l'exercice 4.1).

4.3. Soit P un polynôme. Montrer que :
$P(u)$ est inversible si et seulement si $\mathrm{pgcd}\,(P, \mu_u) = 1$.

Indication : vous aurez besoin de l'identité de Bézout.

4.4. Ici E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p soit diagonalisable. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^p$.

4.5. Soient P et Q deux polynômes. On écrit $D := \mathrm{pgcd}\,(P, Q)$ and $M := \mathrm{ppcm}\,(P, Q)$. Notre but est de montrer que

$$\mathrm{Ker}\, P(u) + \mathrm{Ker}\, Q(u) = \mathrm{Ker}\, M(u).$$

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, P(u) + \mathrm{Ker}\, Q(u) \subset \mathrm{Ker}\, M(u)$.

b) On note P_0, Q_0 les polynômes tels que $P = DP_0$, $Q = DQ_0$. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, M(u)$, $P_0(u)(x) \in \mathrm{Ker}\, Q(u)$.

c) On suppose que $x \in \mathrm{Ker}\, M(u)$. En utilisant le fait que $\mathrm{pgcd}\,(P_0, Q_0) = 1$, montrer qu'il existe $y \in \mathrm{Ker}\, P(u)$, $z \in \mathrm{Ker}\, Q(u)$ tels que $x = y + z$.

4.6. On considère $\mathcal{I} := \{P \in \mathbb{K}[X] : P(u) \text{ nilpotent}\}$.

a) Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal.

b) Montrer que $\mathcal{I}$ est engendré par $\tilde{\mu}_u$, qui est le produit des facteurs irréductibles distincts de μ_u (par ex., si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mu_u(X) = \prod_j (X - \lambda_j)^{\beta_j}$ et $\tilde{\mu}_u(X) = \prod_j (X - \lambda_j)$).