UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2017-18
TD 1 - SOUS-ESPACES STABLES D'ENDOMORPHISMES

PASCAL J. THOMAS

Dans tout ce qui suit, E est un espace vectoriel sur un corps K. Les endomorphismes de E sont les applications linéaires de E dans lui-même.

1. Endomorphismes et leurs sous-espaces stables

Un K-sous espace vectoriel V de E est dit *stable* pour un endomorphisme u de E si et seulement si $u(V) \subset V$.

1.1. Soit u un endomorphisme de E, un espace vectoriel de dimension quelconque. On suppose que $u^2 = u$. On dit dans ce cas que u est une *projection.*

a) Montrer que les valeurs propres possibles de u sont 0 ou 1.

b) Montrer que tout $x \in E$ peut s'écrire comme somme de deux vecteurs propres ou nuls. Indication : montrer que $x - u(x) \in \operatorname{Ker} u$.

c) Conclure que u est diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base constituée de vecteurs propres). Si $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim \operatorname{Im} u = r$ (rang de u), donner une forme diagonale possible de la matrice de u (dans une base appropriée).

1.2. Soit u un endomorphisme de E. On rappelle que $\operatorname{Im} u := u(E) := \{y \in E : \exists x \in E, u(x) = y\}$.

Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des K-sous espaces vectoriels de E stables pour u.

1.3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E.

Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

Donner un exemple en dimension 2 où cette propriété n'est pas satisfaite.

1.4. Soit $E = K_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\dim E = n + 1$. On considère l'endomorphisme u de E donné par $u(P) = P'$ (le polynôme dérivé), où, si $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $P'(X) := \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$.

a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

b) Déterminer les valeurs propres de u.

c) Montrer que si $n \geq 1$, u n'est pas diagonalisable.

d) Trouver une base $(e_j)_{0 \leq j \leq n}$ de E telle que $u(e_j) = e_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq n$ et $u(e_0) = 0$.

e) Montrer que pour tout $m \leq n$, $K_m[X]$ est un sous-espace stable pour u.

1.5. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} u^{k+1} \subset \operatorname{Im} u^k$, $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$.

b) Montrer que $\operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k$ si et seulement si $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$.

c) Montrer qu'il existe un entier $k_0 \leq n$ tel que $\operatorname{Im} u^{k_0+1} = \operatorname{Im} u^{k_0}$. On prend le plus petit k_0 qui vérifie cette propriété. Montrer qu'alors, pour tout $k \geq k_0$, $\operatorname{Im} u^{k+1} = \operatorname{Im} u^k$.

1.6. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E.

a) On suppose que u est *nilpotent,* c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Montrer que la seule valeur propre de u est 0.

b) Dans le cas où $E = \mathbb{C}^n$, nous allons montrer la réciproque de la question b). Supposons donc que $\operatorname{Sp} u = \{0\}$ (le spectre de u est réduit à 0). Montrer que u n'est pas surjective. Plus généralement, si on pose $E_j := \operatorname{Im} u^j$, montrer que si $\dim E_j > 0$, alors la seule valeur propre de $u|_{E_j}$ (la restriction de u à E_j) est 0.

c) Sous l'hypothèse de la question b), en considérant la suite $(\dim E_j)_j$, montrer qu'il existe j tel que $E_j = \{0\}$.

d) Sous l'hypothèse de la question b), montrer qu'il existe une base de E telle que dans cette base, u ait une matrice triangulaire supérieure stricte.

2. Formes linéaires

2.1. Soit A un sous-ensemble de E, un K-espace vectoriel de dimension finie. On pose

$$A^{an} := \{\alpha \in E^\vee : \forall x \in A, \alpha(x) = 0\}.$$

a) Montrer que A^{an} est un K-sous-espace vectoriel de $E^\vee$.

b) Si V_1 et V_2 sont des K-sous-espaces vectoriels de E, montrer que

$$(V_1 + V_2)^{an} = V_1^{an} \cap V_2^{an}, \quad (V_1 \cap V_2)^{an} = V_1^{an} + V_2^{an}.$$

Qu'en déduit-on si V_1 et V_2 sont en somme directe ?

c) Montrer que $\bigcap_{\alpha \in A^{an}} \operatorname{Ker} \alpha$ est le sous-espace vectoriel engendré par A (c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel contenant A).

Indication : si $V \subsetneq E$ est un sous-espace vectoriel, et $x \notin V$, montrer qu'on peut trouver une forme linéaire α_x telle que $\alpha_x(x) = 1$.