UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2017-18
CONTRÔLE TERMINAL
MERCREDI 16 MAI 2018

Durée du contrôle : 2 heures.

Ce sujet comporte deux pages. Les deux problèmes sont indépendants.

I.

Soit $E = \mathbb{R}^4$, muni de son produit scalaire euclidien habituel noté $\langle x, y\rangle$ (dans lequel la base canonique est orthonormée).

On considère pour tout $t \in \mathbb{R}$ la matrice

$$M_t := \begin{pmatrix} \frac{3}{4}t - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4}(t-2) & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(t-2) & \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} - 1 & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit Q_t la forme bilinéaire associée à M_t dans la base canonique.

a) Montrer que Q_t est dégénérée si et seulement si $t = 1$.

b) Montrer que quand $t \neq 1$, Q_t admet toujours des vecteurs singuliers (isotropes non nuls). On n'aura pas besoin de calculer ces vecteurs.

2. Soit u_t l'endomorphisme associé à M_t dans la base canonique.

a) Démontrer que u_t est diagonalisable (aucun calcul n'est nécessaire).

b) Calculer les valeurs propres de u_t.

c) Donner le polynôme minimal de u_0, et celui de u_1.

3. a) Calculer le radical $rad(Q_1)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Q_1.

b) On fixe $t = 0$. Donner une décomposition de $\mathbb{R}^4$ en somme directe orthogonale d'un sous-espace anisotrope et d'un ou plusieurs plan(s) hyperbolique(s) pour Q_0.

II.

Soit un plan vectoriel réel E, muni d'une base $\underline{\mathbf{e}} := (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et d'une forme bilinéaire notée Q dont la forme quadratique associée est notée q. La matrice de Q dans la base $\underline{\mathbf{e}}$ est

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On désigne par $\mathbf{SO}(Q)$ le groupe des isométries de Q de déterminant 1.

1. Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E et A sa matrice dans la base $\underline{\mathbf{e}}$. Montrer que $u \in \mathbf{SO}(Q)$ si et seulement si A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}^{\times}$$

et en déduire que $\mathbf{SO}(Q)$ est un groupe isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{\times}$ des nombres réels non nuls.

2. On désigne par $X_1(Q)$ la conique affine d'équation $q(x) = 1$. Montrer que $X_1(Q) \neq \emptyset$. Est-ce une hyperbole ou une ellipse? Faire un dessin où on la représentera ainsi que les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

3. On fixe un point $e \in X_1(Q)$. Montrer que $u(e) \in X_1(Q)$ et que si $m \in X_1(Q)$ il existe un unique $u \in \mathbf{SO}(Q)$ tel que $u(e) = m$.

Si $u, u' \in \mathbf{SO}(Q)$ sont tels que $m = u(e)$ et $m' = u'(e)$ on pose $m \odot m' := (u' \circ u)(e)$.

4. Soient m et m' deux points de $X_1(Q)$.

4.1 On suppose $m \neq m'$ et on désigne par D la droite affine passant par m et m'. Montrer que la droite affine D' parallèle à D passant par e coupe $X_1(Q)$ en les points e et $m \odot m'$. Faire un dessin.

4.2 On suppose $m = m'$ et on désigne par D la droite affine passant par m et de direction $(\mathbb{R}m)^{\perp}$ (l'orthogonal est pris au sens de Q). Montrer que la droite affine D' parallèle à D passant par e coupe $X_1(Q)$ en les points e et $m \odot m$. Faire un dessin.

5. On considère dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ la forme bilinéaire Q telle que

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2$$

où $x = (x_1, x_2)$ et on pose $e = (1, 0)$.

5.1 Trouver une base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ dans laquelle Q est représentée par la matrice J.

Faire un dessin représentant $X_1(Q)$, e, ainsi que les vecteurs de la base canonique et les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

5.2 Pour $m \in X_1(Q)$, exprimer dans la base canonique les coordonnées du point $m \odot m$ en fonction de celles du point m.