UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
CONTRÔLE TERMINAL
MERCREDI 10 MAI 2017

Durée du contrôle : 2 heures.

Ce sujet comporte deux pages. Les trois exercices sont indépendants.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$.
On note $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$ $(M, N, P \in \mathcal{M}_{2n}(K))$.
Vérifier que $MP = PN$, montrer que P est inversible, et conclure que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

2. Soit Q une forme bilinéaire sur un K-vectoriel E et q la forme quadratique associée, $q(x) := Q(x, x)$. On désigne par X_Q la quadrique affine d'équation $q(x) = 1$.

Soit $x_0 \in E$ fixé, et L une droite affine passant par x_0.

a) Montrer que si $x \in L \cap X_Q$ et $q(x - x_0) \neq 0$, alors le polynôme en λ défini par

$$q(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) - 1, \quad \lambda \in K,$$

a deux racines (distinctes ou confondues) 1 et λ_0 et en posant :

$$y = \lambda_0 x + (1 - \lambda_0)x_0$$

en déduire que $L \cap X_Q = \{x, y\}$.

b) En calculant la racine λ_0, montrer que

$$Q(x - x_0, y - x_0) = q(x_0) - 1.$$

En déduire que si $L \cap X_Q = \{x, y\}$ le scalaire $Q(x - x_0, y - x_0)$ ne dépend que du point x_0.

3. On considère $E = \mathbb{C}^n$ muni de son produit hermitien standard, $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui vérifie $u^* = u^2$, où u^* est l'adjoint de u.

a) Montrer que u est un endomorphisme normal.

b) En déduire que u est diagonalisable.

c) Si toutes les valeurs propres de u sont réelles, montrer que u est une projection orthogonale.

d) Montrer que les valeurs propres de u sont prises parmi les racines cubiques de l'unité ou 0.

e) Montrer que u^3 est toujours une projection orthogonale (on pourra utiliser la question précédente ou le fait que $u^3 = uu^*$).

En déduire que si u est inversible, alors $u^3 = id$ et u est une transformation orthogonale.

f) Application des questions d et e : on considère $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donnée dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la nature et les éléments géométriques de cette transformation (sous-espaces propres réels, axe et angle si c'est une rotation, etc).

g) On ne suppose plus l'hypothèse que $u^* = u^2$.

Donner un exemple très simple de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ telle que u^3 est une projection orthogonale mais u n'est pas un endomorphisme normal. Indication : l'application nulle est une projection orthogonale.