UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU DU JEUDI 3 MARS 2016

PASCAL J. THOMAS

On rappelle la définition de la Transformée de Fourier *d'une fonction f, quand f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$:*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\xi t}dt.$$

Exercice 1.

On rappelle que la fonction $G(x) := e^{-\pi x^2}$ est sa propre transformée de Fourier, c'est-à-dire que $\hat{G}(\xi) = G(\xi)$.

(1) On pose $G_1(x) := e^{-x^2}$. Calculer $\hat{G}_1(\xi)$ à partir d'une propriété des transformées de Fourier.

On remarque que $G_1(x) = G(\frac{x}{\sqrt{\pi}})$, et d'après une propriété de base de la transformée de Fourier, $\widehat{f(\delta\cdot)}(\xi) = \frac{1}{|\delta|}\hat{f}(\frac{\xi}{\delta})$, nous avons $\widehat{G_1}(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$.

(1 point)

(2) Calculer les transformées de Fourier de $xG(x)$ puis de $x^2G(x)$.

D'après une propriété de base de la transformée de Fourier, $\mathcal{F}\left(-2\pi i x f(x)\right)(\xi) = (\hat{f})'(\xi)$, donc

$$\widehat{xG(x)}(\xi) = \frac{1}{-2\pi i}\hat{G}'(\xi) = \frac{-2\pi\xi}{-2\pi i}e^{-\pi\xi^2} = -i\xi e^{-\pi\xi^2}.$$

De même,

$$\mathcal{F}\left(x(xG(x))\right)(\xi) = \frac{1}{-2\pi i}\frac{d}{d\xi}\left(-i\xi e^{-\pi\xi^2}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{-\pi\xi^2}\left(1-2\pi\xi^2\right).$$

(2 points)

(3) Calculer la transformée de Fourier de $(G(x))^2$.

On remarque que $(G(x))^2 = e^{-2\pi x^2} = G(x\sqrt{2})$, donc la même propriété qu'à la question (1) nous permet de conclure que $\mathcal{F}\left(G(x)^2\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\pi\xi^2/2}$.

(2 points)

Exercice 2.

On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0, +\infty[$.

*(1) On suppose de plus que f' est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe.*

D'après le Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, pour tout $A \geq 0$, $f(A) - f(0) = \int_0^A f'(x)dx$. Comme f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f'(x)dx$ existe (dans $\mathbb{R}$), donc

$$\lim_{A\to+\infty} f(A) = \lim_{A\to+\infty} \left(f(0) + \int_0^A f'(x)dx \right) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(x)dx \in \mathbb{R}.$$

(1 point)

(2) On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $f(x) \geq L/2$. En déduire que f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit $\varepsilon := L/2 > 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $B \geq A$, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$, donc en particulier $f(x) \geq L/2$, donc pour tout $B \geq A$,

$$\int_0^B f(x)dx \geq \int_0^A f(x)dx + \int_A^B \frac{L}{2}dx = \int_0^A f(x)dx + \frac{L}{2}(B - A) \to +\infty \text{ quand } B \to +\infty.$$

Donc f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

(2 points)

*(3) On suppose que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.
Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*

D'après la question (1) et le fait que f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, f admet une limite (réelle) en $+\infty$, que nous notons L. D'après la question (2) et le fait que f est intégrable, $L > 0$ est impossible. Si on avait $L < 0$, alors $-f$ vérifie toutes les hypothèses de la question et sa limite vaut $-L > 0$. Ce qui est aussi impossible. Donc la seule possibilité est que $L = 0$.

(2 points)

Exercice 3.

Soit f une fonction continue, périodique de période 2π. On rappelle que $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)dx$, et que f est uniformément continue.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} e^{-inx} \left(f(x) - f(\frac{2\pi k}{n}) \right) dx.$$

D'après la linéarité de l'intégrale et les propriétés de l'addition,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} e^{-inx} \left(f(x) - f(\frac{2\pi k}{n}) \right) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} e^{-inx} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} e^{-inx} f(\frac{2\pi k}{n})dx.$$

D'après la relation de Chasles, le premier terme vaut $\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)dx = 2\pi c_n(f)$.

Le deuxième terme vaut

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{2\pi k}{n}) \int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} e^{-inx}dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{2\pi k}{n}) \frac{1}{-in} \left[e^{2\pi i(k+1)} - e^{2\pi ik} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{2\pi k}{n}) \frac{1}{-in} [1 - 1] = 0.$$

En regroupant et en divisant par 2π, on trouve le résultat voulu.
(2 points)

(2) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, et $\frac{2\pi k}{n} \leq x \leq \frac{2\pi(k+1)}{n}$, alors $\left|f(x) - f(\frac{2\pi k}{n})\right| \leq \varepsilon$.

L'uniforme continuité de f veut dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0, 2\pi]$ tels que $|x - y| \leq \delta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Or pour tout x tel que $\frac{2\pi k}{n} \leq x \leq \frac{2\pi(k+1)}{n}$, on a $\left|x - \frac{2\pi k}{n}\right| \leq \frac{2\pi}{n}$.

Prenons $N \geq 2\pi/\delta$; alors pour tous les x comme ci-dessus, $\left|x - \frac{2\pi k}{n}\right| \leq \delta$, et donc $\left|f(x) - f(\frac{2\pi k}{n})\right| \leq \varepsilon$.
(1 point)

(3) Montrer à partir des questions (1) et (2) que $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On veut montrer que $|c_n(f)| < \varepsilon$ pour n assez grand. Prenons $n \geq N$, où N est choisi comme dans la question (2). Alors d'après la formule établie dans la question (1),

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} \left|e^{-inx}\left(f(x) - f(\frac{2\pi k}{n})\right)\right| dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} \left|f(x) - f(\frac{2\pi k}{n})\right| dx \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} \varepsilon dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon dx = \varepsilon.$$

(2 points)

(4) On suppose que f est de plus de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} nc_n(f) = 0$.

Sous ces hypothèses, f' est une fonction continue et 2π-périodique, et une intégration par parties facile (ou une propriété connue des coefficients de Fourier) montre que $c_n(f') = inc_n(f)$. Donc $nc_n(f) = -ic_n(f')$ et d'après la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} c_n(f') = 0$.
(1 point)

Exercice 4.

Dans tout le problème, on considère une fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que :

- *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$;*

  Ici il y avait une erreur de texte et il ne fallait pas de chapeau, l'hypothèse correcte était :
- *Il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$|f(x)| \leq \frac{C_0}{|x|^{3/2}}.$$

On veut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $|h| < 1$,

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq C|h|^{1/2}. \tag{1}$$

Ce résultat est dans l'esprit général de "plus f décroît vite, plus sa transformée de Fourier est régulière".

(1) Montrer que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et plus précisément que pour $A > 0$, $\int_A^{+\infty} |f(x)|dx \leq 2C_0A^{-1/2}$.

D'après la majoration, pour $B > A > 0$, $\int_A^B |f(x)|dx \leq \int_A^B \frac{C_0}{x^{3/2}}dx$, et donc en passant à la limite

$$\int_A^{+\infty} |f(x)|dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{C_0}{x^{3/2}}dx = C_0 \left[-2\frac{1}{x^{1/2}}\right]_A^{+\infty} = 2C_0A^{-1/2}.$$

(1 point)

(2) Montrer qu'il existe une constante C_1 (dépendant de C_0) telle que si $h \neq 0$,

$$\left| \int_{-\infty}^{-1/|h|} (e^{-2\pi ihx} - 1)e^{-2\pi ix\xi} f(x)dx + \int_{1/|h|}^{+\infty} (e^{-2\pi ihx} - 1)e^{-2\pi ix\xi} f(x)dx \right| \leq C_1|h|^{1/2}.$$

Indication : si $y \in \mathbb{R}$, $|e^{iy}| = 1$.

On démontre de la même manière que dans la question (1) que pour tout $A > 0$, $\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|dx \leq 2C_0A^{-1/2}$. En appliquant l'indication et l'inégalité triangulaire,

$$\left|(e^{-2\pi ihx} - 1)e^{-2\pi ix\xi}\right| = \left|e^{-2\pi ihx} - 1\right| \leq |e^{-2\pi ihx}| + |-1| = 1 + 1 = 2.$$

Donc la quantité donnée est majorée par

$$\int_{1/|h|}^{+\infty} \left|(e^{-2\pi ihx} - 1)e^{-2\pi ix\xi} f(x)\right| dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{-1/|h|} 2|f(x)|dx + \int_{1/|h|}^{+\infty} 2|f(x)|dx \leq 4C_0(1/|h|)^{-1/2} + 4C_0(1/|h|)^{-1/2} = 8C_0|h|^{1/2}.$$

(2 points)

(3) Montrer, par exemple en utilisant le théorème des accroissements finis sur les parties réelle et imaginaire de l'exponentielle complexe, qu'il y a une constante absolue c_0 telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|e^{iy} - 1| \leq c_0|y|$.

Nous avons

$$\begin{aligned}|e^{iy} - 1| &= |\cos y - 1 + i \sin y| \leq |\cos y - 1| + |\sin y| \\ &= |\cos y - \cos 0| + |\sin y - \sin 0| = |(-\sin c_1)y| + |(\cos c_2)y| \leq 2|y|,\end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont des nombres réels entre 0 et y dont l'existence est garantie par le théorème des accroissements finis.

Un autre démonstration utilise *l'inégalité* des accroissements finis pour des application différentiables à valeurs vectorielles (ici dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$):
$\|f(x) - f(y)\| \leq \max_{[x;y]} \|f'\|$.

On sait que la dérivée habituelle de l'exponentielle (à variable réelle et valeur complexe) donne, en prenant ses parties réelle et imaginaire, les dérivées respectives de ses parties réelle et imaginaire. Donc $|e^{iy} - 1| = |e^{iy} - e^{i0}| \leq \max_{[0;y]} |ie^{it}||y - 0| = |y|$ (il faut un théorème un peu plus général, mais on obtient la meilleure constante possible, $c_0 = 1$).

(1 point)

(4) Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que si $h \neq 0$,

$$\left|\int_{-1/|h|}^{1/|h|} (e^{-2\pi i h x} - 1) e^{-2\pi i x\xi} f(x) dx\right| \leq C_2 |h|^{1/2}.$$

En appliquant la question précédente, la quantité donnée est majorée par

$$\int_{-1/|h|}^{1/|h|} \left|(e^{-2\pi i h x} - 1) e^{-2\pi i x\xi} f(x)\right| dx = \int_{-1/|h|}^{1/|h|} \left|(e^{-2\pi i h x} - 1)\right| dx$$
$$\leq \int_{-1/|h|}^{1/|h|} c_0 |2\pi h x| |f(x)| dx \leq 2\pi c_0 |h| \int_{-1/|h|}^{1/|h|} |x| \frac{C_0}{|x|^{3/2}} dx.$$

L'intégrande tend vers l'infini au point 0, mais est majorée par $C|x|^{-1/2}$, donc c'est une intégrale convergente, puisqu'une primitive sur $[0, 1/|h|]$ par exemple est donnée par $2Cx^{1/2}$. Donc l'intégrale est majorée par $2 \cdot 2C_0(1/|h|)^{1/2}$, et au total on a une majoration par $2\pi c_0 |h| \times 4C_0(1/|h|)^{1/2} = 8\pi c_0 C_0 |h|^{1/2}$.

(2 points)

(5) Calculer $\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)$ et en déduire une démonstration de la majoration (1).

D'après la définition de la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned}
&\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x) e^{-2\pi i(\xi+h)x} - f(t) e^{-2\pi i \xi x}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2\pi i h x} - 1\right) e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx \\
&\quad = \int_{-\infty}^{-1/|h|} (e^{-2\pi i h x} - 1) e^{-2\pi i x\xi} f(x) dx + \int_{1/|h|}^{+\infty} (e^{-2\pi i h x} - 1) e^{-2\pi i x\xi} f(x) dx \\
&\qquad + \int_{-1/|h|}^{1/|h|} (e^{-2\pi i h x} - 1) e^{-2\pi i x\xi} f(x) dx,
\end{aligned}$$

et on obtient la majoration voulue en combinant les résultats des questions (2) et (4).