UNIVERSITÉ PAUL SABATIER : L2 PARCOURS SPÉCIAL
CONTRÔLE CONTINU, JEUDI 3 MARS 2016

PASCAL J. THOMAS

Cette épreuve comporte quatre exercices indépendants.

On rappelle la définition de la *Transformée de Fourier* d'une fonction f, quand f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt.$$

Exercice 1.

On rappelle que la fonction $G(x) := e^{-\pi x^2}$ est sa propre transformée de Fourier, c'est-à-dire que $\hat{G}(\xi) = G(\xi)$.

(1) On pose $G_1(x) := e^{-x^2}$. Calculer $\hat{G}_1(\xi)$ à partir d'une propriété des transformées de Fourier.

(2) Calculer les transformées de Fourier de $xG(x)$ puis de $x^2 G(x)$.

(3) Calculer la transformée de Fourier de $(G(x))^2$.

Exercice 2.

On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0, +\infty[$.

(1) On suppose de plus que f' est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe.

(2) On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $f(x) \geq L/2$. En déduire que f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

(3) On suppose que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 3.

Soit f une fonction continue, périodique de période 2π. On rappelle que $c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx$, et que f est uniformément continue.

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} e^{-inx} \left(f(x) - f(\frac{2\pi k}{n}) \right) dx.$$

(2) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, et $\frac{2\pi k}{n} \leq x \leq \frac{2\pi(k+1)}{n}$, alors $\left| f(x) - f(\frac{2\pi k}{n}) \right| \leq \varepsilon$.

(3) Montrer à partir des questions (1) et (2) que $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

(4) On suppose que f est de plus de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} nc_n(f) = 0$.

Exercice 4.

Dans tout le problème, on considère une fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que :
- Il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$;
- Il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\left| \hat{f}(x) \right| \leq \frac{C_0}{|x|^{3/2}}.$$

On veut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $|h| < 1$,
$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq C|h|^{1/2}. \tag{1}$$
Ce résultat est dans l'esprit général de "plus f décroît vite, plus sa transformée de Fourier est régulière".

(1) Montrer que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et plus précisément que pour $A > 0$, $\int_A^{+\infty} |f(x)| dx \leq 2C_0 A^{-1/2}$.

(2) Montrer qu'il existe une constante C_1 (dépendant de C_0) telle que si $h \neq 0$,
$$\left| \int_{-\infty}^{-1/|h|} (e^{-2\pi ihx} - 1) e^{-2\pi ix\xi} f(x) dx + \int_{1/|h|}^{+\infty} (e^{-2\pi ihx} - 1) e^{-2\pi ix\xi} f(x) dx \right| \leq C_1 |h|^{1/2}.$$
Indication : si $y \in \mathbb{R}$, $|e^{iy}| = 1$.

(3) Montrer, par exemple en utilisant le théorème des accroissements finis sur les parties réelle et imaginaire de l'exponentielle complexe, qu'il y a une constante absolue c_0 telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|e^{iy} - 1| \leq c_0 |y|$.

(4) Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que si $h \neq 0$,
$$\left| \int_{-1/|h|}^{1/|h|} (e^{-2\pi ihx} - 1) e^{-2\pi ix\xi} f(x) dx \right| \leq C_2 |h|^{1/2}.$$

(5) Calculer $\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)$ et en déduire une démonstration de la majoration (1).