UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
CONTRÔLE CONTINU 1
MERCREDI 20 FÉVRIER 2018, 15H50

Durée du contrôle : 1 heure.

Cette évaluation se compose de deux exercices indépendants (une page).

1. Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie E.
On suppose que $u^2 = u$.

a) Quelles sont les valeurs possibles du polynôme minimal de u ?

b) Donner le polynôme minimal de u selon les valeurs possibles du rang de u.

c) u est-il diagonalisable ? Justifier votre réponse.

2. Soit u un endomorphisme d'un K-espace vectoriel de dimension finie E.

a) On suppose que le polynôme $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ est un polynôme annulateur de u, et que $a_0 \neq 0$.
Montrer que u est inversible, et qu'on peut écrire son inverse sous la forme $Q(u)$, où Q est un polynôme.

b) Montrer que si il existe un endomorphisme $v \neq 0$ tel que $uv = 0$, alors u n'est pas inversible.

c) On note M_u le polynôme minimal de u. Montrer que si u est inversible, alors $M_u(0) \neq 0$.

d) Déduire de ce qui précède que si u est inversible, il existe un polynôme Q (qui dépend de u) tel que $u^{-1} = Q(u)$.

e) (Cette question est indépendante de la précédente). Si u est inversible et P est annulateur de u, donner une formule simple pour un polynôme annulateur de u^{-1}, de même degré que P. En déduire le polynôme minimal de u^{-1} en fonction de M_u.