UNIVERSITÉ PAUL SABATIER — 2015-2016
L2 PARCOURS SPÉCIAL
ANALYSE HILBERTIENNE, TD 1

PASCAL J. THOMAS

1. Exponentielle complexe, séries

1.1. Convergence des séries doubles : si on suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

(ce qui veut dire que la série de gauche, dite "série produit", est convergente et que sa somme est égale au membre de droite).

Pour démontrer ceci, montrez d'abord que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) - \left(\sum_{n=0}^{2N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{2N} b_n\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{2N} |a_n b_k| - \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} |a_n b_k|.$$

Si les séries ne sont pas absolument convergentes, ce résultat peut échouer, en ce sens que la série produit peut être divergente. Par exemple, prenez $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$, et montrez que dans ce cas il existe $c > 0$ tel que

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right| \geq c, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1.2. Théorème de Cesàro : soit (u_n) une suite convergente, on pose

$$v_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que (v_n) est convergente et admet la même limite que (u_n).

Indication : on peut se ramener au cas où $\lim_n u_n = 0$. Etant donné un $\varepsilon > 0$, prendre N tel que $|u_n| \leq \varepsilon/2$ pour $n \geq N$, et considérer v_n pour $n > N$. Séparer la somme qui définit (v_n) entre $k \leq N$ et $k > N$...

Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas, telle que (v_n) converge.

1.3. A partir de la définition de l'exponentielle complexe, montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|e^z| \leq e^{|z|} \text{ et } \left|\frac{e^z - 1}{z}\right| \leq e^{|z|}.$$

2. Séries de Fourier

On rappelle que $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

2.1. Calculer $c_n(f)$ pour les fonctions suivantes, qu'on prolongera toujours pour être périodiques de période 2π :

(1) $f(x) = 1$ pour $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = 0$ pour $\pi < x < 2\pi$.

(2) $f(x) = |x|$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. Dans ce cas, montrer qu'on peut développer f en série de cosinus. On admet que $S_N(f)(x)$ converge vers $f(x)$ en tout x. En considérant $x = 0$, déduire que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \pi^2/8$, puis que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \pi^2/6$.

2.2. (a) Si f est une fonction 2π-périodique, non nécessairement continue en 0, et $f \in \mathcal{C}^1(]0, 2\pi[)$, montrer que $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

(b) Montrer que le même résultat est vrai si f est une fonction en escalier (c'est-à-dire qu'il existe une partition de $]0, 2\pi[$ en un nombre fini d'intervalles telle que f soit constante sur chacun de ces intervalles).

(c) On rappelle que si f est intégrable au sens de Riemann, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ telles que $f_\varepsilon \leq f \leq g_\varepsilon$ et $\int_0^{2\pi} |f_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t)|dt < \varepsilon$. Montrer que si f est intégrable au sens de Riemann, alors $|c_n(f)| \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|dt$, puis que $\lim_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

Idée: il faudra décomposer $f =$ (fonction en escalier) + (petit reste).

2.3. (Un exemple élémentaire d'identité approchée).

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On rappelle que dans ce cas, f est uniformément continue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, alors $|f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon$ (δ ne dépend pas des points t_1, t_2). Pour tout $n \geq 1$, $x \in [a, b]$, on définit

$$f_n(x) := \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

(on prolonge f par 0 quand l'intervalle d'intégration n'est pas entièrement contenu dans $[a, b]$).

Montrer que f_n converge uniformément vers f.