UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2018-19
CONTRÔLE TERMINAL, DEUXIÈME SESSION
VENDREDI 21 JUIN 2019

Durée du contrôle : 2 heures.

Ce sujet comporte deux pages. Les quatre exercices sont indépendants. Beaucoup de questions au sein de chaque exercice sont aussi indépendantes. Vous devez démontrer les réponses que vous donnez.

Calculatrices interdites (et inutiles).

1. La matrice 5×5 suivante représente un endomorphismes u de $\mathbb{K}^5$, où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que u est nilpotent et donner son ordre de nilpotence.

2) Calculer $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Ker} u^2$ et $\operatorname{Ker} u^3$.

3) Donner une décomposition de $\mathbb{K}^5$ en somme directe de sous-espaces stables F_j sur lesquels la restriction de u est irréductible (et donc l'ordre de nilpotence de la restriction de u est égal à la dimension de F_j).

2. On considère la forme bilinéaire symétrique B_0 sur $\mathbb{K}^3$, où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Quel est le rang de B_0? Déterminer $\operatorname{rad}(B_0)$.

2) On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ donné par $F := \{x : x_1 = x_2 - x_3\}$. Déterminer $F^\perp$.

3) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Décomposer la forme quadratique associée à B_0 par la méthode des carrés de Gauss.

3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de base $e_1, \ldots, e_d$, avec $d \geq 2$. On considère un endomorphisme $\gamma \in \mathrm{End}(E)$ tel que

$$\gamma(e_j) = e_{j+1}, 1 \leq j \leq d-1. \tag{1}$$

1.a) On suppose, en plus de (1), que $\gamma(e_d) = 0$, ce qui détermine entièrement l'endomorphisme. Ecrire la matrice de γ dans la base $e_1, \ldots, e_d$. Donner $\mathrm{Ker}\,\gamma$.

1.b) Quel est le polynôme caractéristique de γ ?

1.c) Quel est le polynôme minimal de γ ?

1.d) Montrer que γ n'est pas diagonalisable.

2.a) Désormais, on suppose en plus de (1) que $\gamma(e_d) = e_1$. Ecrire la matrice de γ dans la base $e_1, \ldots, e_d$.

2.b) Quel est le polynôme caractéristique de γ ?

2.c) Montrer que le polynôme caractéristique de γ est scindé à racines simples, et en déduire que γ est diagonalisable.

2.d) Quel est le polynôme minimal de γ ?

4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'un endomorphisme s de E est appelé une *symétrie* si $s^2 = id$.

1) Si s est une symétrie, montrer qu'elle est diagonalisable. On suppose que $s \neq id$ et $s \neq -id$. Quelles sont ses valeurs propres ?

2) On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que E est muni d'une forme quadratique q, définie positive. On suppose toujours que s est une symétrie.

On note s^* l'adjoint de s par rapport à la forme quadratique q.

Montrer que $s^* = s$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(s - id)$ et $\mathrm{Ker}(s + id)$ sont orthogonaux.

(Indication : utiliser la décomposition en sommes directe de sous-espaces propres).

3) Montrer que si $s^* = s$, alors pour tout $x \in E$, $q(s(x)) = q(x)$.

(Indication : appliquer la définition de l'adjoint).

4) Montrer que si pour tout $x \in E$, $q(s(x)) \leq q(x)$, alors $s^* = s$.

(Indication : appliquer l'hypothèse à $x_1 + x_2$ et à $x_1 - x_2$, avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(s - id)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(s + id)$).