UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PARCOURS SPÉCIAL, ALGÈBRE, 2016-17
CONTRÔLE TERMINAL, DEUXIÈME SESSION
MERCREDI 28 JUIN 2017

Durée du contrôle : 2 heures.

Ce sujet comporte deux pages. Les quatre exercices sont indépendants.

1. Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est en forme réduite de Jordan; et dire si elle est diagonalisable (on ne demande pas de donner de démonstration).

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Soit S un sous-espace vectoriel de E, stable pour u, tel que $E = \operatorname{Ker} u \oplus S$.

a) Montrer que $\dim S = \dim \operatorname{Im} u$.

b) Si $x \in E$, montrer que $u(x) \in S$ (utiliser la décomposition en somme directe).

c) Montrer que $S = \operatorname{Im} u$.

3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension finie. Soit u un endomorphisme normal de E.

a) Rappelez la définition d'un endomorphisme normal.

b) Tout endomorphisme normal a une propriété remarquable due à un théorème. Enoncez-le brièvement.

c) On suppose de plus que u est *nilpotent*. Rappelez la définition de ce mot, et montrer que si u est normal et nilpotent, alors $u = 0$.

4. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien canonique, $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

On considère la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ donnée par $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec $a_{jj} = 0$, $1 \le j \le n$, et $a_{ij} = 1$ pour $i \neq j$.

a) Déterminer le sous-espace propre H de l'endormorphisme associé à A pour la valeur propre -1 et montrer qu'il est de dimension $n-1$.

b) Montrer grâce à un théorème que A admet une base orthonormée de vecteurs propres.

c) En déduire que $H^\perp$ est un sous espace propre et donner la valeur propre correspondante. Ecrire la matrice de l'endomorphisme associé à A dans une base de diagonalisation.

d) Soit Q la forme quadratique dont la matrice est A. Quelle est sa signature ?

e) Application : dans le cas $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une base orthonormée de diagonalisation.

f) Donnez la signature de la forme quadratique $Q(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. Décomposez-la en somme de carrés. Quelle est la dimension de ses sous-espaces isotropes maximaux ?

Dans les deux questions qui suivent, travailler dans les coordonnées données par la base orthonormée de diagonalisation.

g) (facultatif) Déterminer les sous-espaces isotropes maximaux pour Q.

h) (facultatif et plus difficile) Déterminer les plans hyperboliques pour Q.