UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014, MATHÉMATIQUES

Solutions "particulières" des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

On considère dans tout ce qui suit une équation différentielle

$$(E) \qquad a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = g(t),$$

où g est une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$.

On note parfois $L(f) := a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f$.

L'équation homogène associée est

$$(E_0) \qquad a_2 f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est

$$(EC) \qquad a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

1. Formes générales

1.1. **Exponentielles-polynômes.** Si la fonction g est de la forme $g(t) = P(t)e^{\lambda t}$, où $P(t) = p_n t^n + \cdots + p_1 t + p_0$ est un polynôme, $\lambda \in \mathbb{R}$,

alors on cherche une solution particulière de la forme $f_p(t) = Q(t)e^{\lambda t}$, avec :

(1) Si λ n'est pas solution de (EC), $\deg Q = \deg P$;
(2) Si λ est solution simple de (EC), (ce qui équivaut à $L(e^{\lambda t}) = 0$, $L(te^{\lambda t}) \neq 0$), $\deg Q = 1 + \deg P$; et on peut sans dommage se restreindre à Q sans coefficient constant, i.e. $Q(t) = q_n t^{n+1} + \cdots + q_1 t$.
(3) Si λ est solution double de (EC), (ce qui équivaut à $L(e^{\lambda t}) = L(te^{\lambda t}) = 0$), $\deg Q = 2 + \deg P$; et on peut sans dommage se restreindre à Q sans coefficient constant ni de degré 1, i.e. $Q(t) = q_n t^{n+2} + \cdots + q_2 t^2$.

1.2. **Exponentielles-fonctions trigonométriques-polynômes.** Si la fonction g est de la forme

$$g(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)\right),$$

où $P_1(t) = p_{n,1}t^n + \cdots + p_{1,1}t + p_{0,1}$ et $P_2(t) = p_{n,2}t^n + \cdots + p_{1,2}t + p_{0,2}$ sont des polynômes, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

alors on cherche une solution particulière de la forme

$$f_p(t) = e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)\right),$$

avec :

(1) Si $\alpha + i\beta$ n'est pas solution de (EC), $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max(\deg P_1, \deg P_2)$;
(2) Si $\alpha + i\beta$ est solution (forcément simple) de (EC) (ce qui équivaut à $L(e^{\alpha t}\cos(\beta t)) = L(e^{\alpha t}\sin(\beta t)) = 0$), $\deg Q_1 = \deg Q_2 = 1 + \max(\deg P_1, \deg P_2)$; et on peut sans dommage se restreindre à Q_1, Q_2 sans coefficients constants, i.e. $Q_1(t) = q_{n,1}t^{n+1} + \cdots + q_{1,1}t$, $Q_2(t) = q_{n,2}t^{n+1} + \cdots + q_{1,2}t$.

2. Quelques cas particuliers

2.1. Polynômes. $g(t) = P(t)$.

C'est le cas $\lambda = 0$ dans les Exponentielles-polynômes.

Alors on cherche la solution sous la forme d'un polynôme $Q(t)$ avec

(1) $\deg Q = \deg P$ si $a_0 \neq 0$;
(2) $\deg Q = 1 + \deg P$ si $a_0 = 0, a_1 \neq 0$;
(3) $\deg Q = 2 + \deg P$ si $a_0 = 0, a_1 = 0$ (ce dernier cas donnant une équation assez évidente...)

2.2. Exponentielles. $g(t) = ce^{\lambda t}$.

C'est cas où le polynôme P est constant dans les Exponentielles-polynômes.

Alors, on cherche la solution sous la forme

(1) $qe^{\lambda t}$ si λ n'est pas solution de (EC) ;
(2) $qte^{\lambda t}$ si λ est solution simple de (EC) ;
(3) $qt^2e^{\lambda t}$ si λ est solution double de (EC).

2.3. Fonctions trigonométriques. $g(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)$, $\beta \neq 0$.

C'est cas où $\alpha = 0$ et les polynômes P_1, P_2 sont constants dans les Exponentielles-fonctions trigonométriques-polynômes.

Alors, on cherche la solution sous la forme

(1) $g(t) = q_1 \cos(\beta t) + q_2 \sin(\beta t)$, si $i\beta$ n'est pas solution de (EC) ;
(2) $g(t) = q_1 t \cos(\beta t) + q_2 t \sin(\beta t)$, si $i\beta$ est solution de (EC).

2.4. Fonctions trigonométriques-polynômes. $g(t) = P_1(t)\cos(\beta t) + P_2(t)\sin(\beta t)$, $\beta \neq 0$.

C'est cas où $\alpha = 0$ dans les Exponentielles-fonctions trigonométriques-polynômes. Remarque : cela ne simplifie pas grand chose par rapport au cas général.

On cherche la solution sous la forme $g(t) = Q_1(t)\cos(\beta t) + Q_2(t)\sin(\beta t)$, avec

(1) $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max(\deg P_1, \deg P_2)$ si $i\beta$ n'est pas solution de (EC),
(2) $\deg Q_1 = \deg Q_2 = 1 + \max(\deg P_1, \deg P_2)$ si $i\beta$ est solution (forcément simple) de (EC) ; et on peut sans dommage se restreindre à Q_1, Q_2 sans coefficients constants, c'est-à-dire $Q_1(t) = q_{n,1}t^{n+1} + \cdots + q_{1,1}t$, $Q_2(t) = q_{n,2}t^{n+1} + \cdots + q_{1,2}t$.