UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014
MATHÉMATIQUES, TD 4

Autour des équations différentielles

1. On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(x) = f(1-x)$.
   1. Montrer que f doit être de classe $\mathcal{C}^2$.
   2. Trouver une équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par f, et en déduire l'ensemble des fonctions f qui satisfont la condition donnée au début.

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (1) $t(t^2-1)y' + 2y = t^2$ sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$. Peut-on trouver une solution sur $]-1,1[$?
   (2) $y' - (\tan t)y = \frac{1}{1+\cos t}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Indication : pour la primitive dans la variation de la constante, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos\frac{t}{2}$.

3. On considère l'équation différentielle (E_0):

$$4ty''(t) + 2y'(t) - y(t) = 0.$$

   (1) Chercher une solution développable en série entière autour de 0 de cette équation : on pose $y = \sum_n a_n t^n$ et on cherche une relation de récurrence sur les (a_n).
   (2) Montrer que la fonction obtenue peut s'exprimer sur $]-\infty,0[$ à l'aide de fonctions élémentaires. Même question sur $]0,+\infty[$.
   (3) On définit une nouvelle fonction $z(t)$ par $z(t) = y(t^2)$. Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si z est solution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants qu'on déterminera, et retrouver ainsi les résultats ci-dessus.

4. (Extrait d'un sujet de concours, session 2009).
   Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2I_3$ où I_3 désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.
   1. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Justifiez vos réponses.
   2. Calculer N^3.
   3. Calculer A^n en utilisant la formule du binôme de Newton (pourquoi en a-t-on le droit ?)
   4. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, les suites (u_n), (v_n) et (w_n) par les conditions initiales $u_0 = v_0 = 1$ et $w_0 = 2$ et

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 2w_n. \end{aligned}$$

On pose $X_n := \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et de A, puis en déduire X_n en fonction de X_0. En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n.

5. On reprend les notations de l'exercice précédent.
   1. Calculer e^{tA}, pour $t \in \mathbb{R}$.
   2. On considère trois fonctions vérifiant le système différentiel suivant

$$\begin{array}{rcl} u'(t) & = & 2u(t) + v(t) \\ v'(t) & = & 2v(t) + w(t) \\ w'(t) & = & 2w(t). \end{array}$$

Donner les valeurs de $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ en fonction de $u(0)$, $v(0)$, $w(0)$.
   3. Retrouver ces résultats en résolvant le système de proche en proche.