UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014
MATHÉMATIQUES, TD 3

Equations différentielles du premier ordre

1. Donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes (quand l'intervalle n'est pas mentionné, on prendra $I = \mathbb{R}$).

Puis, le cas échéant, résoudre le problème de Cauchy correspondant à la valeur initiale donnée.

(1) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$. Valeur initiale : $y(0) = 2$.

(2) $y' + \frac{\cos x}{\sin x}y = \cos x$, $I =]0, \pi[$. Valeur initiale : $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
Résoudre l'équation sur $J =]-\pi, 0[$. Peut-on trouver des fonctions $y \in \mathcal{C}^1(]-\pi, \pi[)$ qui soient solutions de l'équation $(\sin x)y' + (\cos x)y = \sin x \cos x$ sur cet intervalle ?

(3) $xy' + (1 + x)y = 0$ sur $I :=]0, +\infty[$. Valeur initiale : $y(1) = 1$.

(4) $y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y = -\frac{2}{x}$ sur $I :=]0, +\infty[$.

(5) $y' + \frac{k}{x}y = 0$, où $k \in \mathbb{R}^*$, sur $I :=]0, +\infty[$. Valeur initiale : $y(1) = 3$.
Résoudre la même équation sur $J =]-\infty, 0[$. Peut-on trouver une solution sur $\mathbb{R}$ tout entier ? (il faudra discuter selon les valeurs de k).

(6) $(x^2 - 1)y' - 2xy = x(x^2 - 1)$ sur $I :=]-1, 1[$. Valeur initiale : $y(0) = 4$.

(7) $xy' + 2y = e^x$ sur $I :=]0, +\infty[$.

(8) $2xy' + y = x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, sur $I :=]0, +\infty[$.

2. Sur quels intervalles peut-on trouver des solutions de l'équation $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$? Les calculer.

3. (Extrait d'un sujet de concours, session 2006).
On note (E) l'équation différentielle $|x|y' + (x - 1)y = x^2$.
a) Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$.
b) Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$.
c) Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les expliciter.

4. (Extrait d'un sujet de concours, session 2011). Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' + y = \cos x.$$

On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

(1) Démontrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit x un réel non nul. Calculer $xf'(x) + f(x)$. Que peut-on en déduire ?

(3) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

(4) Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.