UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014, TD 2

Equations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants

1. Donner toutes les solutions des équations différentielles homogènes suivantes (quand l'intervalle n'est pas mentionné, on prendra $I = \mathbb{R}$).

Puis, le cas échéant, résoudre le problème de Cauchy correspondant aux valeurs initiales données.

On utilise ci-dessous diverses notations : c'est exprès.

(1) $u'' + 3u' + 3u = 0$.

(2) $y'' + y' - 2y = 0$. Valeurs initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
Quelles sont les solutions de cette équation qui sont des fonctions bornées sur $[0, +\infty[$?

(3) $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 0$. Valeurs initiales : $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$.

(4) $x'' - 4x' + 3x = 0$.

(5) $f''(t) + 9f(t) = 0$. Valeurs initiales : $f(0) = 0$, $f'(1) = 3$.
Peut-on trouver une solution telle que $f(0) = 0$, $f(\pi) = 1$?
Peut-on trouver une solution telle que $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 1$?
Quelles sont les solutions telles que $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 0$?

(6) $y'' - y' + 5y = 0$.

(7) $y'' - 2y' + y = 0$. Valeurs initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. On considère l'équation à coefficients variables

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0, \quad x > 0.$$

Si on pose $t := \ln x$, et $z(t) := y(e^t)$, montrer que l'équation ci-dessus se ramène à une équation linéaire à coefficients constants que l'on résoudra, puis en déduire les solutions de l'équation d'origine.

Trouver toutes les solutions de l'équation $x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3$ sur $]0, +\infty[$. Quelle sera la solution qui vérifiera $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$?

3. Résoudre les équations différentielles suivantes (quand l'intervalle n'est pas mentionné, on prendra $I = \mathbb{R}$).

Puis, le cas échéant, résoudre le problème de Cauchy correspondant aux valeurs initiales données.

(1) $f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = te^{3t}$. Valeurs initiales : $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

(2) $x'' - 4x' + 3x = t + 1 + 4e^t + 2e^{-t}$.

(3) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x) + \cosh x$. Valeurs initiales : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
Indication : le cosinus hyperbolique est une combinaison d'exponentielles.

(4) $y'' - y' + 5y = e^x \sin(2x) + \cos x$.

(5) $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$. Valeurs initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(6) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour quelles valeurs de $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ les solutions de l'équation $y''(x) + \alpha^2 y(x) = \sin(\omega x)$ restent-elles bornées sur $\mathbb{R}$? Quand on a des solutions non bornées, on parle de phénomène de résonance.

(7) $y'' + y = \cos^3 x$. Indication : linéariser $\cos^3 x$, par exemple en l'exprimant comme $\left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^3$.

4. Un poids qu'on suppose de masse 1 repose sur une surface horizontale et est accroché au bout d'un ressort de constante $k > 0$: la force (horizontale) exercée par le ressort vaut $F_1 = -kx$, si x est l'écart de position par rapport à la position du ressort au repos. La surface horizontale est rugueuse et inflige au poids une force de frottement proportionnelle à sa vélocité et de sens opposé : $F_2 = -\gamma x'(t)$.

(1) Dire pourquoi la position du point (supposé ponctuel) est gouvernée par l'équation différentielle $x'' + \gamma x + kx = 0$.
(2) Résoudre l'équation. Dire pour quelles conditions sur k, γ le mouvement sera oscillatoire (amorti) ou monotone.
(3) Résoudre le problème de Cauchy avec les valeurs initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$ (départ arrêté) et $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$ (impulsion à partir de la position d'équilibre).
(4) On suppose que le poids est aussi relié à un moteur qui exerce sur lui une force $F_3 = \cos \omega t$ (oscillations forcées). Ecrire la nouvelle équation qui est satisfaite et la résoudre.