UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
L2 PCP, OPTION CHIMIE, 2013–2014, TD 1

Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants

1. Donner toutes les solutions des équations différentielles suivantes (quand l'intervalle n'est pas mentionné, on prendra $I = \mathbb{R}$).

(1) $f'(t) + 2f(t) = e^t$ (ou $y' + 2y = e^x$ si vous préférez cette notation).
(2) $f'(t) + f(t) = te^{3t}$ (ou $y' + y = xe^{3x}$...)
(3) $f'(t) - f(t) = t^2$.
(4) $f'(t) - f(t) = \sin t$ (indication : intégration par parties).
(5) $tf'(t) + (t+1)f(t) = e^{-t}$, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (indication : considérer la fonction $f_1(t) := tf(t)$ pour se ramener au cas des coefficients constants).

2. Un élément radioactif se dégrade de telle façon qu'il perd 1 pour cent de sa masse par unité de temps, et cette dégradation se fait continument dans le temps (il y a tellement d'atomes qu'on peut supposer que la perte de masse est d'un centième de pour cent pendant un centième d'unité de temps, etc.) Modéliser ceci par une équation différentielle linéaire d'ordre 1, et la résoudre.

Calculer la demi-vie de l'élément, c'est-à-dire la durée au bout de laquelle la moitié de la masse sera dégradée (on prend l'année pour unité de temps).

3. On note $u(t)$ la tension aux bornes d'un condensateur au temps t. On sait qu'il existe des constantes τ, E telles que cette tension obéisse à l'équation

$$\tau \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E.$$

On suppose que le condensateur n'est pas chargé au temps $t = 0$ (donc $u(0) = 0$). Calculer $u(t)$ en fonction de t.

4. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables, ne s'annulant pas, telles que la courbe d'équation $y = f(x)$ possède la propriété géométrique suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la tangente à la courbe au point $(x, f(x))$ coupe l'axe des x au point $x + 1$.

5. On répand un engrais sur un champ. Une partie de cet engrais passe dans l'eau de la nappe phréatique sous forme de nitrates ; on note $q(t)$ la quantité de nitrates correspondant à cette partie. Ces nitrates se dissolvent ensuite dans l'eau, et on note $f(t)$ la quantité de nitrates dissous. On sait que les fonctions f et q vérifient les équations suivantes pour $t \geq 0$:

$$q'(t) = -\alpha q(t) \quad (1)$$
$$f'(t) = \alpha q(t) - \beta f(t), \quad (2)$$

avec des constantes $\alpha > \beta > 0$. A l'instant $t = 0$, $q(0) = q_0$ et $f(0) = 0$. Déterminer la quantité maximale au cours du temps des nitrates dissous dans la nappe phréatique.