Examen de L2PS Algèbre, Mai 2018 : solution problème II.

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}^\times,$$
la matrice de u dans la base $\underline{e}$. La condition $u \in \mathbf{SO}(Q)$ est équivalente aux relations :
$$^t\ AJA = J,\ det(A) = 1$$
ce qui équivaut au système d'équations quadratiques;
$$ab = 0,\ ad + bc = 1,\ cd = 0,\ ad - bc = 1$$
Si $a = 0$ ou $d = 0$ on obtient $bc = 1 = -bc$, ce qui est absurde. Le système est donc équivalent à $b = 0 = c,\ ad = 1$ ce qui à son tour est équivalent à
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}^\times$$

Il est immédiat que l'application $\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbf{SO}(Q)$ qui à $a \in \mathbb{R}$ associe l'unique élément u dont la matrice dans la base $\underline{\mathbf{e}}$ est la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$$
est un isomorphisme de groupes.

2. Le plan E muni de Q est un plan hyperbolique, donc $X_1(Q) \neq \emptyset$ et pour la même raison la conique est une hyperbole.

3. Plus généralement si $u \in \mathbf{O}(Q)$, on a $q(u(e)) = q(e) = 1$. Ainsi $u(e) \in X_1(Q)$.

Posons $e = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$ et $m = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \in X_1(Q)$. Cela signifie que $2\alpha_1\alpha_2 = 1 = 2x_1x_2$. On voie donc que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} x_1/\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1/x_1 \end{pmatrix}$$
est l'unique matrice de rotation u dans la base $\underline{\mathbf{e}}$ telle que $u(e) = m$.

4. (Ce n'est pas la seule méthode, voir remarque à la fin.)
Commençons par remarquer que si $x, y \in X_1(Q)$ et $x \neq y$ alors $q(x - y) \neq 0$.

En effet posons $x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$ et $y = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2$ et $\alpha = x_1/y_1$. On a :

$$q(x-y) = q(x) + q(y) - 2Q(x,y) = 2(1 - x_1y_2 - x_2y_1) = 2(1 - 2\alpha - 2\alpha^{-1})$$
$$= -2\alpha^{-1}(2\alpha^2 - \alpha + 2)$$

Or le polynôme du second degré $2\alpha^2 - \alpha + 2$ a pour discriminant -15. Il ne peut donc pas s'annuler dans $\mathbb{R}$.

4.1 On suppose $m \neq m'$ avec $m, m' \in X_1(Q)$. Soit t la symétrie orthogonale (relativement à Q) par rapport à la droite $(\mathbb{R}.(m'-m))^\perp$. On sait que pour tout $z \in E$ on a,

$$t(z) = z - 2\frac{Q(z, m-m')}{q(m-m')}(m-m')$$

a) Si $m = e$, l'assertion est claire car dans ce cas $m \odot m' = e \odot m' = m'$ et d'autre part $D' = D$.

b) On suppose $m \neq e$. Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(\mathbb{R}.(e-m))^\perp$. On a :

$$s(z) = z - 2\frac{Q(z, e-m)}{q(e-m)}(e-m)$$

Remarquons que, bien que $t, s \in \mathbf{O}(Q) \setminus \mathbf{SO}(Q)$, on a $t \circ s \in \mathbf{SO}(Q)$. Or :

$$(t \circ s)(e) = t(m) = m' = u'(e)$$

Il s'en suit en vertu de **1.** que $u' = t \circ s$. Il vient alors ;

$$m' \odot m = (u' \circ u)(e) = t(s(m)) = t(e) = e - 2\frac{Q(e, m-m')}{q(m-m')}(m-m')$$

Considérons maintenant la droite D' de l'énoncé. Un vecteur z de cette droite s'écrit

$$z = e + \alpha(m-m'),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

et $z \in D' \cap X_1(Q)$ si et seulement si $q(z) = 1$, c'est à dire si et seulement si

$$q(e) + 2\alpha Q(e, m-m') + \alpha^2 q(m-m') = 1$$

c'est à dire puisque $q(e) = 1$, $m \neq e$ et donc $\alpha \neq 0$:

$$\alpha = -2\frac{Q(e, m-m')}{q(m-m')}$$

et donc :

$$z = e - 2\frac{Q(e, m-m')}{q(m-m')}(m-m') = m' \odot m$$

Ce qui démontre l'assertion.

4.2 On suppose $m = m'$. Considérons le vecteur

$$\mathbf{f} = e - Q(e,m)m$$

On a $Q(m, \mathbf{f}) = 0$ autrement dit $\mathbf{f} \in (\mathbb{R}.m)^{\perp}$.

a) Si $\mathbf{f} = 0$ on a $1 = Q(e,m)^2$. Ainsi $e + m = 0$ car $e \neq m$. Dans ce cas $u = u' = -id_E$ et le résultat est clair. .

b) si $\mathbf{f} \neq 0$, c'est à dire si $m \neq -e$, le vecteur $\mathbf{f}$ est un vecteur directeur de $D = (\mathbb{R}.m)^{\perp}$. Considérons le vecteur $e - 2\mathbf{f}$. On a $e - 2\mathbf{f} = -e + 2Q(e,m)m$ et donc $q(e - 2\mathbf{f}) = 1$, autrement dit $e - 2\mathbf{f} \in X_1(Q)$. Soient les deux symétries orthogonales définies par :

$$s(z) = z - 2\frac{Q(z, e+m)}{q(e+m)}(e+m), \ t(z) = z - 2Q(z,m)m$$

On a $s(e) = -m$ et $t(m) = -m$. Ainsi avec les notations de l'énoncé on a $(t \circ s)(e) = -t(m) = m$ et donc par **1.**, on a $u = t \circ s$. Or puisque $u' = u$ il vient :

$$\begin{aligned} m \odot m &= u^2(e) = u(m) = (t \circ s)(m) = -t(e) \\ &= -e + 2Q(e,m)m = e - 2\mathbf{f} \in D' \end{aligned}$$

Ce qui démontre l'assertion.

5.1 L'équation du cône d'isotropie est réunion des droites d'équation dans la base canonique $x_1 - x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$. Les vecteurs singuliers cherché s'écrivent $\mathbf{e}_1 = \alpha(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ et $\mathbf{e}_2 = \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ désigne la base canonique. Pour que la matrice de Q dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ soit J, il faut et il suffit que $Q(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ autrement dit que l'on ait $2\alpha\beta = 1$. Il suffit de poser par exemple (puisque le corps $\mathbb{R}$ le permet) :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \ \mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

5.2 On choisit $e = \varepsilon_1 \in X_1(Q)$. Posons $m = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2$ et $m \odot m = x'_1\varepsilon_1 + x'_2\varepsilon_2$.

a) Si $m = e$ on a $x'_1 = 1, \ x'_2 = 0$.

b) Si $m = -e$ en vertu de **4.2** b) avec les mêmes notations. On a :

$$m \odot m = e.$$

Ainsi $x'_1 = 1, \ x'_2 = 0$.

c) On suppose $m \neq e$ et $m \neq -e$. Appliquons la formule :

$$m \odot m = -e + 2Q(e, m)m$$

obtenue en **4.2**, b). ce qui s'écrit

$$x_1' \varepsilon_1 + x_2' \varepsilon_2 = -\mathbf{e}_1 + 2x_1(x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2)$$

Ce qui donne,

$$x_1' = -1 + 2x_1^2,\ x_2' = 2x_1 x_2$$

Remarques. 1) L'exercice peut être entièrement résolu en travaillant systématiquement avec les coordonnées (c'est la solution que nous attendions a priori). La démonstration proposée ici est plus élégante et aussi plus éclairante. De plus elle se généralise (avec quelques précautions !) au cas d'un corps quelconque de caractéristique $\neq 2$.

2) Utiliser **4.1** pour calculer les coordonnées de $m \odot m'$ dans la base canonique. (les formules obtenues sont jolies (symétriques) si on fait des efforts.)