Méthodes numériques pour les EDPs
Etude des problèmes elliptiques

M1 IMAT-MApl3 – EMMAI2B1 – 4 semaines de cours, 10h

Stefan LE COZ

PUBLISHED BY STEFAN LE COZ

HTTPS://WWW.MATH.UNIV-TOULOUSE.FR/ SLECOZ/

First printing, December 2018

Contents

1. Introduction

L'objectif de ce document est de fournir un cadre fonctionnel et quelques techniques pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Pour motiver les concepts et techniques mathématiques introduits par la suite, prenons l'exemple suivant.

On considère une corde élastique tendue fixée à l'horizontale entre deux points. En posant un objet sur cette corde (un funambule par exemple), on la soumet à une force qui la déforme par rapport à sa position de repos. Connaissant la force à laquelle la corde est soumise, on souhaite connaître la déformation subie par la corde. La modélisation mathématique de cette situation est la suivante. On considère la corde au repos comme le segment $[0, L]$, $L > 0$ étant la longueur de la corde. Étant donné $x \in [0, L]$, la déformation de la corde est mesurée par la distance entre sa position sous tension et sa position au repos (voir Figure 1.1). On note $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ la fonction représentant la force exercée sur la corde. L'énergie totale du système est composée d'une part d'une énergie potentielle

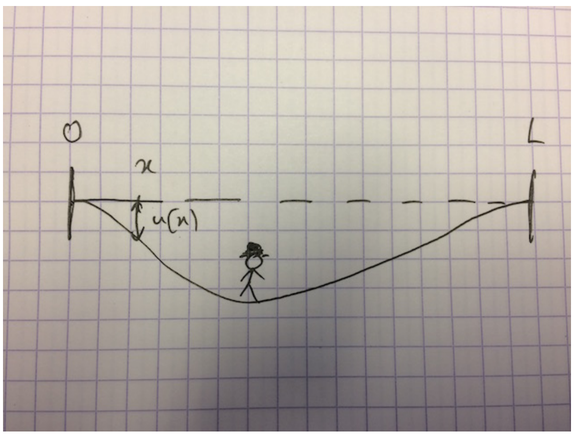

Figure 1.1: Corde soumise à une déformation.

donnée par l'opposé du travail de la force f par rapport au déplacement u, i.e.

$$-\int_0^L f(x)u(x)dx,$$

d'autre part par l'énergie potentielle élastique dûe à la déformation de la corde. Sous l'hypothèse de petits déplacements, cette énergie peut être exprimée comme

$$\frac{k}{2}\int_0^L |u'(x)|^2 dx,$$

où $k > 0$ est la constante de raideur de la corde. L'énergie totale du système serait donc donnée par

$$E(u) = \frac{k}{2}\int_0^L |u'(x)|^2 dx - \int_0^L f(x)u(x)dx.$$

Le principe fondamental de la mécanique Lagrangienne nous dit alors que la corde va se déformer de façon à minimiser l'énergie totale du système. Autrement dit, le déplacement $u : [0, L] \to \mathbb{R}$ est solution du problème de minimisation

$$E(u) = \inf_{v \in H} E(v),$$

où H est l'ensemble des déplacements admissibles. A priori,

$$H = \{v : [0, L] \to \mathbb{R}, \text{ dérivable, } v' \in L^2(0, L),\ v(0) = v(L) = 0\},$$

est un choix raisonnable pour l'espace H. On s'apercevra par la suite que cet espace n'est pas vraiment adapté au problème (car il n'est pas complet) et qu'il est préférable de choisir H comme l'espace de Sobolev $H_0^1(0, L)$.

Formellement, on peut dériver E par rapport à u et obtenir ainsi une forme linéaire $E'(u)$, donnée pour tout v admissible par $\frac{\partial}{\partial t}E(u + tv)_{|t=0}$, dont l'expression sera

$$E'(u)v = \int_0^L (ku'v' - fv)dx = \int_0^L (-ku'' + f)v dx.$$

Puisque u est un minimum de E, on s'attend à ce que $E'(u) = 0$, autrement dit u devrait être solution de l'équation différentielle

$$-ku'' = f.$$

Inversement, étant donné l'équation différentielle ci-dessus, il peut s'avérer pratique d'effectuer le chemin inverse et de la transformer en un problème variationel ad hoc.

Le but de document est de fournir un cadre rigoureux à la démarche heuristique précédente, ainsi que des outils pour résoudre des équations aux dérivées partielles en les interprétant comme des problèmes variationels. On commencera par donner un cadre mathématique très général dans lequel la solution d'une équation différentielle n'est pas nécessairement une fonction, la théorie des distributions. Puis on étudiera des espaces fonctionnels dans lesquels les fonctions admettent des dérivées en un sens plus faible que le sens classique, les espaces de Sobolev. Enfin, on développera un certain nombre d'outils pour étudier des équations différentielles et aux dérivées partielles de manière variationelle. L'étude sera faite en dimension un d'espace dans un premier temps et on considérera les problèmes posés en dimension supérieure dans un second temps. De nombreux ouvrages couvrent les notions mathématiques abordées dans ce document, on pourra notamment se référer aux ouvrages classiques [2, Chapitres VIII et IX] et [3, Chapitres 1 à 3]. Internet foisonne également de documents en rapport avec le sujet, on pourra par exemple consulter la page web de Grégoire Allaire [1].

2. Théorie des distributions en dimension un

Dans cette partie, nous introduisons les distributions dans le cas de la dimension 1. La plupart des résultats présentés sont cependant valables (mutatis mutandis) dans le cas de la dimension quelconque. Les résultats spécifiques à la dimension 1 seront indiqués.

2.1 Exemples introductifs

Les distributions peuvent être considérées comme une généralisation de la notion de fonction. L'introduction des distributions est motivée par la difficulté de rendre compte rigoureusement de certains phénomènes physiques à l'aide simplement de la notion de fonction.

Par exemple, la distribution (au sens physique) de charge dans un fil représenté par le segment $[0, L]$ peut être modélisée par une fonction $f : [0, L] \to \mathbb{R}$. La charge totale est alors $\int_0^L f(x)dx$. La distribution est alors régulière et représentée par f. Cependant, si la charge totale est égale à 1 mais que toute la charge est concentrée en un point x_0, par exemple $x_0 = 0$, alors il n'existe pas de fonction f telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ et en même temps $\int_0^L f(x)dx = 1$. La distribution de la charge est dite singulière.

L'analyse de l'équation des ondes

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \\ u(0, x) = f(x), \\ u_t(0, x) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

nous fournit un autre exemple motivant l'introduction des distributions. En effet, si f est régulière (de classe C^2), alors la solution de (2.1) est donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right).$$

Cette formule a un sens même si f n'est pas régulière et on aimerait pouvoir dire qu'elle vérifie encore, en un certain sens, l'équation (2.1).

Pour un troisième exemple, prenons une fonction $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Posons $u(x) = c + \int_0^x v(y)dy$, $c \in \mathbb{R}$. Alors u est une fonction continue et dérivable presque partout, de dérivée v. La connaissance de v détermine u à une constante additive près.

Considérons maintenant la fonction dite d'*Heaviside*, définie par

$$H(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0.$$

La valeur en 0 de H varie selon les conventions mais a peu d'importance dans l'analyse. La dérivée de H est nulle presque partout, mais sa connaissance ne permet pas de déterminer H, même à une constante additive près.

Pour une fonction régulière u, on a (par intégration par partie) pour toute fonction $v \in C^1_c(\mathbb{R})$ la formule

$$\int_{\mathbb{R}} u'v dx = -\int_{\mathbb{R}} uv' dx. \tag{2.2}$$

Cette formule permet de définir par transposition la dérivée d'une fonction (en effet, rappelons que si $\int_{\mathbb{R}} uvdx = 0$ pour toute fonction $v \in C^1_c(\mathbb{R})$, alors $u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$). Dans le cas de H, on observe que pour $v \in C^1_c(\mathbb{R})$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} Hv' dx = v(0). \tag{2.3}$$

Or il n'existe pas de fonction H' telle que $\int_{\mathbb{R}} H'vdx = v(0)$. On pourrait cependant introduire H' comme l'objet tel que cette égalité est vérifiée pour toute fonction test $v \in C^1_c(\mathbb{R})$. Intuitivement, on se rend compte que la possibilité de définir H' va dépendre non seulement de H, mais également de l'espace de fonctions test considéré.

2.2 L'espace des fonctions test $\mathcal{D}(I)$

Plusieurs espaces de fonctions test sont possibles et donne lieu à différentes notions de distribution. Dans le cadre de ce document, on se limitera à l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions lisses à support compact.

Dans toute la suite, $I =]a, b[$ désignera un intervalle ouvert non nécessairement borné de $\mathbb{R}$.

Definition 2.2.1 On note $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(I)$ et f à support compact dans I.

La fonction suivante fournit un exemple classique d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étape suivante serait de définir une topologie sur $\mathcal{D}$. Cependant, la topologie sur $\mathcal{D}$ n'est pas aisée à manier et en pratique on aura simplement besoin d'avoir une notion de suite convergente, donnée dans la définition suivante.

Definition 2.2.2 — Convergence dans $\mathcal{D}$. On dit qu'une suite de fonctions $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(I)$ *converge* vers $\phi \in \mathcal{D}(I)$ lorsque les conditions suivantes sont vérifiées.

(i) Il existe un compact $K \subset I$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\operatorname{supp}(\phi_n) \subset K$.

(ii) Pour tout ordre de dérivation $\alpha \in \mathbb{N}$, la suite $(\partial^\alpha \phi_n)$ converge uniformément vers $\partial^\alpha \phi$.

On peut montrer que l'espace $\mathcal{D}(I)$ est séquentiellement complet.

Un certain type de suite de fonctions de $\mathcal{D}$ interviendra régulièrement par la suite, les *suites régularisantes*. Comme leur nom l'indique, celles-ci permettent d'approcher des fonctions peu régulières (voir par la suite des distributions) par une suite de fonctions lisses.

Definition 2.2.3 — Suites régularisantes. On appelle *suite régularisante* toute suite de fonctions (ρ_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp}(\rho_n) \subset [-r_n, r_n] \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} r_n = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n dx = 1, \quad \rho_n \geq 0.$$

On peut facilement construire une suite régularisante à partir de $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si $\rho \geq 0$. Il suffit en effet de choisir une constante C tel que $\int_{\mathbb{R}} C\rho dx = 1$ et de poser $\rho_n = nC\rho(nx)$.

Avant de montrer comment utiliser les suites régularisantes, rappelons la définition et quelques propriétés du produit de convolution.

Definition 2.2.4 Etant donné deux fonctions f et g, le *produit de convolution* de f et g, s'il existe, est la fonction notée $f * g$ donnée en chaque $x \in \mathbb{R}$ par l'intégrale

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Proposition 2.2.1 Le produit de convolution vérifie les propriétés suivantes.

(i) Le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition.

(ii) (Inégalité de Young) Soit $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que[1] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

(iii) (Support) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

(iv) (Dérivation). Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose de plus que f est de classe C^1 et que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$ est également de classe C^1 et

$$(f * g)' = f' * g.$$

Le produit de convolution avec une suite régularisante permet d'approcher des fonctions régulières par des fonctions lisses.

[1] On pourra se rappeler de cette égalité sous la forme $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{r'}$, où p', q' et r' sont les exposants conjugués de p, q et r.

Proposition 2.2.2 Soit (ρ_n) une suite régularisante.

(i) Soit $f \in C(\mathbb{R})$. Alors $\rho_n * f$ converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(ii) Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$. Alors $\rho_n * f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Dans les deux cas, $\rho_n * f \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 L'espace des distributions $\mathcal{D}'(I)$

Nous introduisons dans cette partie l'espace des distributions $\mathcal{D}'(I)$.

Definition 2.3.1 — Distribution. Une *distribution* T sur I est une forme linéaire séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(I)$, i.e.

(i) $T : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}$ est linéaire,

(ii) si $\phi_n \to 0$ dans $\mathcal{D}(I)$, alors $T(\phi_n) \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des distributions est noté $\mathcal{D}'(I)$.

Pour désigner l'action d'une distribution T sur une fonction ϕ, on préférera la notation par produit de dualité $\langle T, \phi \rangle$ à la notation fonctionnelle $T(\phi)$.

À toute fonction de $L^1_{\text{loc}}(I)$, on peut associer l'application $T_f : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}$ définie par

$$T_f : \phi \mapsto \int_I f \phi dx.$$

Cette application étant linéaire et continue, c'est une distribution. Par la suite, on identifiera souvent dans la notation une fonction f et la distribution qui lui est associée. La réciproque n'est pas vraie, il existe des distributions qui ne peuvent pas être représentées par des fonctions. Un exemple (fondamental) de telles distributions est donné par la *distribution de Dirac* en un point $x_0 \in I$, notée δ_{x_0} et définie pour tout $\phi \in \mathcal{D}(I)$ par

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0).$$

On omettra souvent l'indice $x_0 = 0$ pour noter la distribution de Dirac en 0, i.e. $\delta \equiv \delta_0$.

Comme dans le cas de l'espace des fonctions test $\mathcal{D}(I)$, la définition d'une topologie est délicate et on se contente ici de donner la notion de suite convergente.

Definition 2.3.2 — Convergence dans $\mathcal{D}'$. On dit qu'une suite $(T_n) \subset \mathcal{D}'(I)$ *converge* vers $T \in \mathcal{D}'(I)$ lorsque pour tout $\phi \in \mathcal{D}$ la suite $\langle T_n, \phi \rangle$ converge vers $\langle T, \phi \rangle$.

On peut montrer que $\mathcal{D}'(I)$ est un espace séquentiellement complet. Remarquons que si une suite de fonctions (f_n) converge vers f dans $L^1_{\text{loc}}(I)$, alors la suite de distribution associée (T_{f_n}) converge vers T_f dans $\mathcal{D}'(I)$.

On s'intéresse maintenant à la structure de l'espace $\mathcal{D}'(I)$.

Proposition 2.3.1 — Espace Vectoriel. L'espace $\mathcal{D}'(I)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel pour les opérations suivantes. Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit $T_1 + T_2$ et λT_1 pour tout $\phi \in \mathcal{D}$ en posant

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle,$$
$$\langle \lambda T_1, \phi \rangle = \lambda \langle T_1, \phi \rangle.$$

En plus de l'addition et de la multiplication par un scalaire, on souhaite, dans la mesure du possible, définir des opérations sur les distributions similaires à celle qu'on peut effectuer sur les fonctions.

On commence par la multiplication d'une distribution par une fonction.

Definition 2.3.3 — Produit. Soit $f \in C^\infty(I)$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$. On définit le *produit* fT de T par f comme la distribution définie pour tout $\phi \in \mathcal{D}(I)$ par

$$\langle fT, \phi \rangle = \langle T, f\phi \rangle .$$

Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions, il n'est pas possible de définir le produit de deux distributions. La notion de distribution est donc avant tout adaptée pour des problèmes linéaires.

L'une des principales motivations à l'introduction des distributions était de définir des dérivées généralisées. On procède de la façon suivante.

Definition 2.3.4 — Dérivée. Étant donné $T \in \mathcal{D}'(I)$, on définit la *dérivée* de T comme la distribution T' donnée pour tout $\phi \in \mathcal{D}(I)$ par

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle .$$

Proposition 2.3.2 La dérivation est une opération continue sur $\mathcal{D}'(I)$.

R [Remarque fondamentale] Toutes les distributions sont dérivables. De plus, puisque chaque dérivée est elle-même une distribution, les distributions sont en fait toutes indéfiniment dérivables.

Lorsque la distribution $T = T_f$ est associée à une fonction f régulière, alors $(T_f)'$ coincide avec $T_{f'}$.

À l'aide de la définition de dérivée au sens des distributions, on peut maintenant donner un sens à la formule (2.3) pour la dérivée de la fonction d'Heaviside. En effet, au sens des distributions, $H' = \delta_0$.

De manière plus générale, on a le résultat suivant pour la dérivée de fonctions continues par morceaux.

Proposition 2.3.3 — Formules des sauts. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (définie partout) une fonction C^1 par morceaux. On note $(a_j)_{j=1,\dots,N}$ les points de discontinuité de f et on désigne par σ_j le saut de f en a_j, i.e. $\sigma_j = f(a_j^+) - f(a_j^-)$. Alors la dérivée $(T_f)'$ de f au sens des distribution est donnée par

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \delta_{a_j} .$$

Par analogie avec les fonctions, on dit que $T \in \mathcal{D}'(I)$ est une primitive de $S \in \mathcal{D}'(I)$ si $T' = S$. En dimension 1, on peut prouver le résultat suivant.

Théorème 2.3.4 Toute distribution $S \in \mathcal{D}'(I)$ a une infinité de primitives. Si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(I)$ sont deux primitives de S, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ telle $T_1 = T_2 + C$.

Rappelons que le support d'une fonction f est définie par

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in I \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Étendre cette notion de support aux distributions n'est pas immédiat, car la notion de valeur en un point n'a pas de sens pour une distribution. Cependant, le support d'une fonction peut être caractérisé par complémentarité comme le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel la fonction est nulle, et cette caractérisation s'étend également aux distributions.

Definition 2.3.5 — Support. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(I)$ est dite *nulle* sur un ouvert $O \subset I$ lorsque $\langle T, \phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\mathrm{supp}(\phi) \subset O$. Le *support* d'une distribution est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle.

Lorsque la distribution T_f est associée à une fonction f, les notions de support coincident, i.e

$$\mathrm{supp}(T_f) = \mathrm{supp}(f).$$

Le support de δ_0 est simplement $\mathrm{supp}(\delta_0) = \{0\}$.

Definition 2.3.6 — Ordre. Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que T est d'*ordre* inférieur ou égale à $N \in \mathbb{N}$ lorsque pour tout compact $K \subset I$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(I)$ avec $\mathrm{supp}(\phi) \subset K$ on a

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq C \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N} \\ \alpha \leq N}} \sup_K |\partial^\alpha \phi|.$$

Autrement dit, T est définie et continue sur $C_c^N(I)$.

La distribution δ_0 est d'ordre 0. La distribution δ_0' est d'ordre 1.

Concluons cette section sur les distributions en remarquant que nous aurions pu utiliser d'autres espaces de fonctions test pour les distributions, donnant ainsi lieu à d'autres notions de distributions. Par exemple, les distributions *tempérées*, un autre type de distributions très utilisé, seront définies par dualité en remplacant $\mathcal{D}$ par l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, i.e

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \to +\infty} |x|^k f^{(p)}(x) = 0 \right\}.$$

Ce type de distribution intervient lorsqu'on souhaite faire de l'analyse de Fourier au sens des distributions. Cela ne sera pas le cas dans ce document et on se limitera ici aux distributions basées sur $\mathcal{D}$.

3. Espaces de Sobolev en dimension un

Les distributions permettent de donner un sens très général aux équations différentielles et aux dérivées partielles. Cependant, la manipulation et la représentation des distributions n'est pas aisée lorsque celles-ci (ou leurs dérivées) ne sont pas associées à des fonctions. Pour cette raison, on préfère souvent travailler avec des ensembles plus restreints que l'ensemble des distributions. Dans ce but, on introduit les espaces de Sobolev, en se restreignant dans cette partie au cas de la dimension un pour simplifier l'exposition. Comme précédemment, la plupart des résultats présentés sont cependant valables (mutatis mutandis) dans le cas de la dimension quelconque et les résultats spécifiques à la dimension un seront indiqués explicitement.

Comme précédement, $I =]a, b[$ désignera dans cette section un intervalle ouvert non nécessairement borné.

3.1 L'espace $H^1(I)$

Definition 3.1.1 — Espace H^1. On note $H^1(I)$ l'espace des fonctions de $L^2(I)$ dont la dérivée au sens des distributions est associée à une fonction qui appartient également à $L^2(I)$, i.e.

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I) \mid u' \in L^2(I)\}.$$

On munit $H^1(I)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_I (uv + u'v')dx.$$

La norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3.1.1 L'espace $H^1(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert séparable[1].

Preuve. Par définition, l'espace $H^1(I)$ est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (i.e. un espace préhilbertien). Montrons qu'il est complet. Si (v_n) est une suite de Cauchy dans $H^1(I)$, alors (v_n) et (v_n') sont également des suite de Cauchy dans $L^2(I)$. L'espace $L^2(I)$ étant complet, il existe $v, w \in L^2(I)$ tels que $v_n \to v$ et $v_n' \to w$ dans $L^2(I)$. On a aussi $v_n \to v$ et $v_n' \to w$ dans $\mathcal{D}'(I)$. Par continuité de l'opération de dérivation dans $\mathcal{D}'(I)$ et par unicité de la limite, $v' = w$. Cela prouve que $v_n \to v$ dans $H^1(I)$ et donc que $H^1(I)$ est complet.

L'espace $L^2(I)$ est séparable et donc $L^2(I) \times L^2(I)$ est également séparable. Par l'injection $u \mapsto (u, u')$, on peut représenter $H^1(I)$ comme un sous-espace de $L^2(I) \times L^2(I)$. L'espace $H^1(I)$ est donc lui-même séparable. ■

Proposition 3.1.2 — Existence d'un représentant continu. Toute fonction de $H^1(I)$ admet un (et un seul) representant continu.

R Attention, la Proposition 3.1.2 est spécifique à la dimension 1. En dimension supérieure, une fonction de H^1 n'admettera pas nécessairement de représentant continu.

Preuve de la Proposition 3.1.2. Soit $u \in H^1(I)$ et $x_0 \in I$. Définissons $\tilde{u}$ pour tout $x \in I$ par

$$\tilde{u}(x) = \int_{x_0}^{x} u'(y)dy.$$

Étant donné que $\tilde{u}' = u'$, on a $u = \tilde{u} + c$, pour un certain $c \in \mathbb{R}$ (par le Théorème 2.3.4 sur les primitives des distributions). D'autre part, par absolue continuité de l'intégrale de Lesbesgue, $\tilde{u} + c$ est continue. ■

Étant donné une fonction de $H^1(I)$ avec $I \neq \mathbb{R}$, il peut être utile de savoir la prolonger sur $\mathbb{R}$ de façon à ce que le prolongement soit dans $H^1(\mathbb{R})$. C'est l'objet du résultat suivant.

Théorème 3.1.3 — Prolongement. Il existe un opérateur de prolongement P linéaire et continu de $H^1(I)$ dans $H^1(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété suivante. Il existe $C = C(I) > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(I)$ on a

(i) $Pu|_I = u$,
(ii) $\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^2(I)}$,
(iii) $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^1(I)}$.

[1] On rappelle qu'un espace topologique est dit *séparable* s'il contient un ensemble dénombrable et dense.

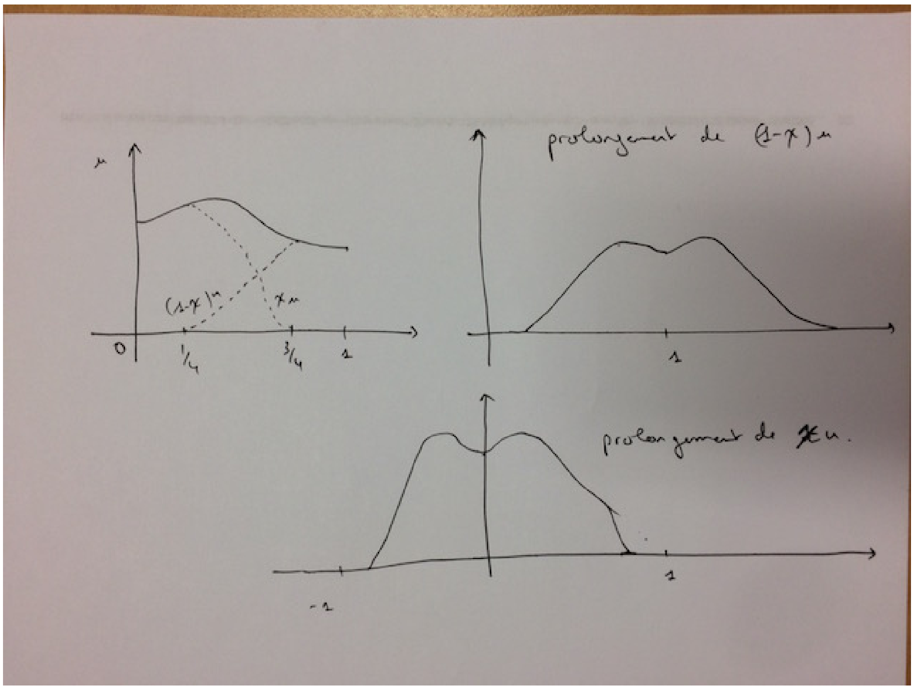

Figure 3.1: Prolongement d'une fonction de $H^1(I)$.

Preuve. Soit $u \in H^1(I)$. Si I est non borné, par exemple si $I =]0, +\infty[$, on prolonge u par symétrie sur $\mathbb{R}$ en définissant

$$Pu = \begin{cases} u(x) & \text{si } x > 0, \\ u(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Les items (ii) et (iii) sont alors vérifiés avec $C = \sqrt{2}$.

Si I est borné, par exemple $I =]0, 1[$, on définit une fonction de troncature χ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\chi(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } x \leq \frac{1}{4}, \\ \in]0, 1[& \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \\ = 0 & \text{si } x \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Alors $u = \chi u + (1 - \chi)u$ et pour prolonger u il suffit de prolonger χu et $(1 - \chi)u$. On prolonge χu par 0 sur $[1, +\infty[$ puis par réflexion sur $] - \infty, 0[$. On prolonge $(1 - \chi)u$ par 0 sur $] - \infty, 0]$, puis par reflexion sur $]1, +\infty[$. Le processus est illustré dans la Figure 3.1. Il n'est alors pas difficile (exercice) de trouver les estimées (ii) et (iii). ■

On définit l'espace $\mathcal{D}(\bar{I})$ comme la restriction à I des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, i.e.

$$\mathcal{D}(\bar{I}) = \{u|_I;\ u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}.$$

Théorème 3.1.4 — Densité des fonctions test. L'espace $\mathcal{D}(\bar{I})$ est dense dans $H^1(I)$.

Les résultats de densité sont très utiles dans les preuves des propriétés de $H^1(I)$. On procédera souvent en prouvant tout d'abord la propriété pour des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{I})$, puis on étendra cette propriété aux fonctions de $H^1(I)$ par densité.

Preuve du Théorème 3.1.4. Rappelons que dire que $\mathcal{D}(\bar{I})$ est dense dans $H^1(I)$ signifie que pour tout $u \in H^1(I)$, il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $(u_n|_I)$ converge vers u dans $H^1(I)$.

Grace au résultat de prolongement Théorème 3.1.3, il suffit de prouver que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R})$. On procède par troncature et régularisation. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\chi(x) \begin{cases} = 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ \in]0,1[& \text{si } 1 < |x| < 2, \\ = 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

On définit (χ_n) par $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$. La suite $(\chi_n u)$ converge vers u dans $H^1(\mathbb{R})$. En effet, $(\chi_n u)$ converge vers u dans $L^2(\mathbb{R})$ par convergence dominée. En dérivant, on trouve

$$(\chi_n u)' = \chi_n' u + \chi_n u'.$$

Or pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $\chi_n'(x) = \frac{1}{n}\chi'(\frac{x}{n})$. Ainsi,

$$\|u' - (\chi_n u)'\|_{L^2} \leq \frac{1}{n}\|\chi'\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2} + \|u' - \chi_n u'\|_{L^2}.$$

La suite $(\chi_n u)$ est une suite de fonctions à support compact. On choisit maintenant une suite régularisante (ρ_n). La suite définie par $\rho_n * (\chi_n u)$ appartient alors à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et converge vers u dans $H^1(\mathbb{R})$ (exercice). ∎

Théorème 3.1.5 — Injections. Il existe $C = C(I) > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(I)$ on a

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{H^1(I)}.$$

En d'autres termes, l'injection de $H^1(I)$ dans $L^\infty(I)$ est continue. De plus, lorsque I est borné, l'injection $H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ est compacte.

Une conséquence immédiate de ce résultat est la compacité, lorsque I est borné, de l'injection de $H^1(I)$ dans $L^p(I)$, $2 \leq p \leq +\infty$.

R Le Théorème 3.1.5 est spécifique à la dimension 1. En dimension supérieure, H^1 ne s'injecte pas dans L^∞. Par contre, on retrouvera les injections $H^1 \hookrightarrow L^q$ pour $2 \leq q \leq 2^*$, où 2^* est un exposant critique dépendant de la dimension, avec compacité (pour $q < 2^*$) si le domaine sous-jacent est borné et régulier.

Preuve du Théorème 3.1.5. On procède par densité. Soit $u \in \mathcal{D}(\bar{I})$. On a

$$|u(x)|^2 = \int_{-\infty}^{x} 2u'(y)u(y)dy.$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, on obtient

$$|u(x)|^2 \leq 2\|u'\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \leq \|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2.$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{H^1}.$$

Soit maintenant $u \in H^1(I)$. Il existe $(u_n) \subset \mathcal{D}(\bar{I})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$. Pour chaque $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty} \leq \|u_n - u_m\|_{H^1}.$$

Par conséquence, (u_n) est de Cauchy dans $L^\infty(I)$ et converge vers u dans $L^\infty(I)$. En passant à la limite dans l'inégalité

$$\|u_n\|_{L^\infty} \leq \|u_n\|_{H^1},$$

on obtient le résultat souhaité pour u.

Pour prouver que l'injection est compacte (i.e. elle envoie les fermés bornés sur les compacts) lorsque I est borné, il suffit de montrer que la boule unité de $H^1(I)$ est compacte dans $C(\bar{I})$. On utilise pour cela le Théorème d'Ascoli[2]. Par injection continue de $H^1(I)$ dans $L^\infty(I)$, la boule unité de $H^1(I)$ est uniformément bornée dans $C(\bar{I})$. Montrons qu'elle constitue une famille équicontinue. Pour tout $u \in H^1(I)$ tel que $\|u\|_{H^1} \leq 1$ et pour tout $x, y \in I$, on a

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_x^y u'(z)dz\right| \leq \|u'\|_{L^2}|x-y|^{\frac{1}{2}} \leq |x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

Par le Théorème d'Ascoli, la boule unité de $H^1(I)$ est donc compacte dans $C(\bar{I})$. ■

Corollaire 3.1.6 — Limite à l'infini. Si I n'est pas borné, alors pour tout $u \in H^1(I)$ on a

$$\lim_{\substack{|x|\to+\infty \\ x\in I}} u(x) = 0.$$

Preuve. On suppose que $I = \mathbb{R}$ pour simplifier les notations. Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il $A > 0$ tel que si $|x| > A$, alors $|u(x)| < \varepsilon$. Par densité des fonctions test (Théorème 3.1.4), il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R})$. D'après le Théorème 3.1.5, on a également $u_n \to u$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Choisissons alors n assez grand, de telle manière que $\|u_n - u\|_{L^\infty} < \varepsilon$. Puisque u_n est à support compact, il existe $A > 0$ tel que $u_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > A$. On a donc $|u(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > A$, ce qui conclut la preuve. ■

[2]Rappelons le Théorème d'Arzela-Ascoli et la définition d'une famille de fonctions équicontinues.

Théorème — Arzela-Ascoli. Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions continues sur $[a, b]$ est relativement compacte (i.e. à fermeture compacte) dans $C([a, b])$, si et seulement si cette famille est uniformément bornée et équicontinue.

Définition Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions continues sur $[a, b]$ est dite *équicontinue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{F}$ et pour tout $x, y \in [a, b]$, si $|x - y| < \delta$ alors $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon$.

Théorème 3.1.7 — Structure d'algèbre et intégration par partie. Si u et v appartiennent à $H^1(I)$, alors le produit uv appartient lui aussi à $H^1(I)$. De plus,

$$(uv)' = u'v + uv',$$

et on a la formule d'intégration par partie

$$\int_x^y u'v dz = u(y)v(y) - u(x)v(x) - \int_x^y uv'dz.$$

R Le Theorème 3.1.7 nous dit notamment que $H^1(I)$ est une algèbre. Ce résultat est spécifique à la dimension 1. En dimension supérieure, H^1 ne sera jamais une algèbre (les espaces H^m ou $W^{k,p}$, dont la définition sera donnée plus loin, pourront éventuellement l'être si $2m > d$ ou $kp > d$). On verra toutefois qu'il est encore possible d'effectuer des intégrations par partie à l'aide des formules de Green dans les espaces de Sobolev.

Preuve du Théorème 3.1.7. Soit $u, v \in H^1(I)$. On considère une suite $u_n \in \mathcal{D}(\bar{I})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R})$. Au sens des distributions (car u_n est de classe C^∞), on a alors

$$(u_n v)' = u_n' v + u_n v'. \tag{3.1}$$

Puisque $u_n v \to uv$ dans $L^1(I)$, on a $u_n v \to uv$ dans $\mathcal{D}'(I)$ et donc $(u_n v)' \to (uv)'$ dans $\mathcal{D}'(I)$. Par ailleurs, $u_n' v \to u'v$ et $u_n v' \to uv'$ dans $L^1(I)$. On peut donc passer à la limite dans la formule (3.1) pour obtenir

$$uv = u'v + uv'.$$

La formule d'intégration par partie est vraie pour les fonctions de $\mathcal{D}(\bar{I})$ et s'obtient par densité pour les fonctions de $H^1(I)$. ■

On peut également chercher la nature de fonctions composées, comme par exemple u^3 ou $\sin(u)$ avec $u \in H^1(I)$.

Théorème 3.1.8 — Composition. Soit $u \in H^1(I)$ et $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $G(0) = 0$. Alors

$$G \circ u \in H^1(I), \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Si I est borné, on peut se dispenser de l'hypothèse $G(0) = 0$. La preuve du Théorème 3.1.8 repose sur un argument de densité, on omettra les détails ici.

3.2 Les espaces $H_0^1(I)$ et $W^{k,p}(I)$

D'après le Corollaire 3.1.6, si I est non-borné, alors les fonctions de $H^1(I)$ tendent vers 0 quand $|x|$ tend vers l'infini. Ce n'est plus vrai si I est borné. Or, dans de nombreuses situations pratiques (comme dans l'exemple introductif de la corde élastique), on souhaitera prescrire à 0 au bord du domaine la valeur des fonctions avec lesquelles on travaille (on parle de condition de Dirichlet). C'est le but de l'introduction de l'espace $H_0^1(I)$.

Definition 3.2.1 On désigne par $H_0^1(I)$ la fermeture de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1(I)$.

Notons ici que la fermeture de $\mathcal{D}(I)$ est $H_0^1(I)$ (avec en général $H_0^1(I) \subsetneq H^1(I)$), alors que la fermeture de $\mathcal{D}(\bar{I})$ est $H^1(I)$.

Proposition 3.2.1 Soit $u \in H^1(I)$. La fonction u appartient à $H_0^1(I)$ si et seulement si $u = 0$ sur ∂I.

En particulier, si $I =]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $u \in H_0^1(I)$, alors $u(a) = u(b) = 0$. Par ailleurs, $H_0^1(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$.

Proposition 3.2.2 — Inégalité de Poincaré. On suppose que I est borné. Alors il existe une constante $C = C(|I|)$ telle que pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a

$$\|u\|_{H^1} \le C\|u'\|_{L^2}.$$

Autrement dit, si I est borné, la quantité $\|u'\|_{L^2}$ fournit une norme équivalente à la norme usuelle sur $H_0^1(I)$.

L'espace H^1 est un espace basé sur L^2 avec un degré de dérivation. C'est un choix qui s'avère pratique dans un certain nombre de situations, notamment car il fait de H^1 un espace de Hilbert. On peut cependant (et c'est pertinent dans un certain nombre de cas) définir d'autres types d'espaces de Sobolev, basés sur des espaces L^p et avec des ordres de dérivation supérieurs.

Definition 3.2.2 Pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \le p \le +\infty$, on désigne par $W^{k,p}(I)$ l'espace

$$W^{k,p}(I) = \{u \in L^p(I) \mid u^{(n)} \in L^p(I) \text{ pour } n = 0, \ldots, k\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{n=0}^{k} \|u^{(n)}\|_{L^p},$$

l'espace $W^{k,p}(I)$ est un espace de Banach. Si $k = 1$ et $p = 2$, alors $W^{1,2}(I) = H^1(I)$. Si $k \ge 1$ et $p = 2$, on note $H^k(I) = W^{k,2}(I)$. L'espace $W^{1,1}(I)$ est l'espace des fonctions absolument continues[3]. L'espace $W^{1,\infty}(I)$ est l'espace des fonctions Lipschitziennes[4].

[3] On rappelle la définition suivante.

Définition Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *absolument continue* sur I si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalle disjoints $]a_k, b_k[$ de I vérifiant $\sum |b_k - a_k| < \delta$, on a $\sum |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.

[4] Si $u \in W^{1,\infty}(I)$, alors $\|u'\|_{L^\infty} \le K$, où K est la constante de Lispchitz donnée dans la définition suivante. On rappelle la définition suivante.

Définition Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *Lipschitzienne* sur I s'il existe $K > 0$ tel que pour $x, y \in I$ on a

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|.$$

4. Problèmes aux limites en dimension un

L'objectif de cette section est de présenter quelques problèmes aux limites classiques et de donner une stratégie générale permettant de les résoudre. Le problème modèle sur lequel nous allons nous baser est le problème de Helmholtz sur l'intervalle $I = [0, 1]$, décrit par

$$-u'' + u = f, \tag{4.1}$$

où u est la fonction inconnue et f un terme source donné. Le problème de la corde élastique analysé en introduction se présentait sous une forme similaire. On accompagnera le problème (4.1) de *conditions aux limites* qui nous seront dictées par la nature du phénomène modélisé. Par exemple, dans le problème de la corde élastique, on aura

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Malgré l'apparente similitude de ce problème avec une équation différentielle ordinaire avec données de Cauchy (i.e. avec $u(0)$ et $u'(0)$ données), les techniques utilisées pour les résoudre seront radicalement différentes.

Si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, alors on peut définir une solution *classique* de (4.1) comme une fonction $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ qui vérifie (4.1) au sens usuel.

En multipliant (4.1) par une fonction test $v \in \mathcal{D}(]0, 1[)$, en intégrant sur $[0, 1]$ puis en intégrant par partie, on obtient la formulation suivante

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx. \tag{4.2}$$

On remarque que u et v n'ont en fait pas besoin d'être C^1 et que cette formulation a un sens pour $u, v \in H_0^1(0, 1)$ (espace dans lequel les conditions aux bords sont respectées). Toute fonction u qui vérifie (4.1) vérifiera (4.2) pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$. Cependant, une fonction $u \in H_0^1(0, 1)$ peut vérifier la formulation (4.2) pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$ sans pour autant être une solution au sens classique de (4.1), car rien ne garantie a priori que u aura la régularité voulue. On parle de *solution faible*. Dans le cas présent, on pourra montrer que si u est une solution faible, alors $u \in C^2([0,1])$ et u est également une solution classique.

Face à une équation différentielle ou aux dérivées partielles, nous allons adopter l'approche suivante, dite *approche variationnelle*.

1. Définition d'une solution faible.
2. Existence et unicité d'une solution faible.
3. Régularité de la solution faible.
4. Retour à la solution classique.

Nous allons faire un usage intensif du résultat théorique suivant.

Théorème 4.0.3 — Lax-Milgram. Soit H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire sur H et L une forme linéaire sur H. On suppose que

(i) a est continue, i.e. il existe $\|a\| \geq 0$ telle que pour tout $u, v \in H$ on a

$$|a(u,v)| \leq \|a\| \|u\|_H \|v\|_H,$$

(ii) a est coercive, i.e. il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H$ on a

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2,$$

(iii) L est continue, i.e. il existe $\|L\| \geq 0$ telle que pour tout $v \in H$ on a

$$|L(v)| \leq \|L\| \|v\|_H.$$

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$ on a

$$a(u,v) = L(v).$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique solution du problème de minimisation

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v); \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v).$$

R La fonction u vérifie

$$\|u\|_H \leq \alpha^{-1} \|L\|.$$

Avant de faire la preuve du théorème de Lax-Milgram, montrons comment celui-ci intervient dans la recherche de solutions d'équations différentielles et aux dérivées partielles en traitant quelques exemples.

4.1 Problème de Helmholtz, condition de Dirichlet homogène

Soit $I = [0,1]$ et $f \in L^1(I)$ un terme source. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

La *condition aux limites* $u(0) = u(1) = 0$ s'appelle *condition de Dirichlet (homogène).*
Étape 1. Notion de solution faible

Definition 4.1.1 Une solution faible de (4.3) est une fonction $u \in H_0^1(0,1)$ vérifiant pour tout $v \in H_0^1(0,1)$ l'égalité

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx = \int_0^1 fvdx. \tag{4.4}$$

Il est clair que toute solution classique est une solution faible. Pour construire une notion de solution faible, on commence par intégrer l'équation différentielle contre une fonction test à support compact. Après une ou plusieurs intégrations par partie, on obtient la formulation (4.4) pour l'équation différentielle. Les conditions aux bord sont encodées dans l'espace fonctionnel utilisé. L'espace $H_0^1(0,1)$ traduit le mieux la condition aux bords de Dirichlet homogène, d'autres espaces seront utilisés lorsque d'autres conditions aux bords interviendront.

R Alors que la notion de solution classique ne présente en général pas d'équivoque, plusieurs notions de solutions faibles peuvent exister pour un même problème. En particulier, la notion de solution au sens des distributions fournira la plupart du temps une notion de solution faible, mais qui sera cependant trop faible pour être utilisée en pratique.

Étape 2. Existence et unicité d'une solution faible

Proposition 4.1.1 Il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(0,1)$ au problème (4.3).

Preuve. La preuve de cette proposition repose sur une application directe du Théorème 4.0.3 (Lax-Milgram). On définit une forme bilinéaire $a : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ et une forme linéaire $L : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ pour $u, v \in H_0^1(0,1)$ par

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uvdx, \quad L(v) = \int_0^1 fvdx.$$

Remarquons que a n'est autre que le produit scalaire usuel sur l'espace $H^1(0,1)$. La continuité de a est alors une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

et la coercivité de a est évidente puisque

$$a(u,u) = \|u\|_{H^1}^2.$$

La continuité de L s'obtient en utilisant l'inégalité de Hölder, puis l'injection $H^1(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$:

$$|L(v)| \leq \int_0^1 fvdx \leq \|v\|_{L^\infty} \int_0^1 fdx \leq \|f\|_{L^1}\|v\|_{H^1}.$$

Le théorème de Lax-Milgram permet alors de conclure la preuve. ■

Étape 3. Régularité de la solution faible.

Remarquons tout d'abord que si $f \in L^2(0,1)$, alors $u \in H^2(0,1)$. En effet, pour tout $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ on a

$$\int_0^1 u'v'dx = \int_0^1 (f-u)v dx,$$

donc u' est dérivable au sens des distributions avec $(u')' = f - u \in L^2(0,1)$. Ainsi $u' \in H^1(0,1)$ et donc $u \in H^2(0,1)$. En particulier, $u \in C^1([0,1])$. Si de plus $f \in C([0,1])$, alors $u \in C^2([0,1])$. En effet, au sens des distributions on a $u'' = f - u \in C([0,1])$.

Étape 4. Retour à la solution classique.

La notion de solution classique n'a de sens que dans le cas où $f \in C([0,1])$. On a vu qu'alors la solution faible u est telle que $u \in C^2([0,1])$ et que, au sens des distribution,

$$u'' = f - u.$$

Puisque chaque membre de l'égalité est une fonction continue, l'égalité a lieu également au sens classique. Par ailleurs, puisque $u \in H_0^1(0,1)$, alors $u(0) = u(1) = 0$. La solution faible u est donc bien une solution forte (au sens classique) de (4.3).

4.2 Problème de Helmholtz, condition de Dirichlet inhomogène

Soit $I = [0,1]$, $f \in L^2(I)$ un terme source, et $a, b \in \mathbb{R}$ donnés. On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u(0) = a, \quad u(1) = b, \end{cases} \tag{4.5}$$

La *condition aux limites* $\{u(0) = a, u(1) = b\}$ s'appelle encore *condition de Dirichlet*, qualifiée maintenant d'*inhomogène*.

Les résultats que nous allons obtenir en mettant en oeuvre l'approche variationnelle précédemment décrite sont résumés dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.1 Il existe un unique $u \in H^2(0,1)$ vérifiant (4.5) au sens faible. Par ailleurs, u est solution du problème de minimisation

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (v'^2 + v^2) dx - \int_0^1 f v dx \middle| v \in H^1(0,1), v(0) = a, v(1) = b \right\}.$$

Si de plus $f \in C([0,1])$, alors $u \in C^2([0,1])$ et u est une solution classique de (4.5).

Preuve. On souhaite suivre la même stratégie que dans la Section 4.1. La difficulté réside ici dans la définition d'un espace fonctionnel adapté au problème (4.5). En effet, un choix naturel serait d'utiliser

$$H = \{v \in H^1(0,1) | v(0) = a, v(1) = b\}.$$

Or si $(a,b) \neq (0,0)$, cet espace n'est pas un espace vectoriel et on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram. Pour surmonter cette difficulté, on introduit une fonction intermédiaire $u_0 \in C^2([0,1])$ telle que $u_0(0) = a$ et $u_1(1) = b$ (on pourra par exemple choisir u_0 affine), et on pose $u = u_0 + \tilde{u}$. Si u est solution de (4.5), alors $\tilde{u}$ sera solution de

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + \tilde{u} = f - u_0 + u_0'', \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0. \end{cases}$$

On est ainsi ramené au cas de la Section 4.1. Il existe donc $\tilde{u} \in H_0^1(0,1)$ tel que $u = u_0 + \tilde{u}$ vérifie les conclusions de la proposition. ■

4.3 Problème de Helmholtz, autres conditions au bord

Dans les Sections 4.1 et 4.2, nous avons considéré le problème de Helmholtz avec conditions de Dirichlet homogène et inhomogène. On peut aussi le considérer avec les conditions au bord suivantes.

- Condition de Neumann homogène : $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$.
- Condition de Neumann inhomogène : $a, b \in \mathbb{R}$, $u'(0) = a$, $u'(1) = b$,
- Conditions aux limites mêlées : $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.
- Condition de Robin $a, b \in \mathbb{R}$, $au(0) + bu'(0) = 0$, $au(1) + bu'(1) = 0$ (appelée aussi troisième condition, condition de Fourier ou encore condition d'impédance).
- Condition aux limites périodique : $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$.

Chacune de ces conditions aux limites nécessite une stratégie particulière dans l'adaptation de l'approche variationnelle. On se reportera au TD pour plus de détails concernant le traitement de ces conditions aux limites.

4.4 Preuve du théorème de Lax-Milgram

Plusieurs preuves sont possibles pour le théorème de Lax-Milgram. On en propose ici une basée sur le théorème de représentation de Riesz et le théorème du point fixe de Banach.

Preuve du Théorème 4.0.3. Puisque a est continue, la forme linéaire définie pour tout $u \in H$ sur H par $v \mapsto a(u,v)$ est également continue. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de H, noté Au, tel que $a(u,v) = (Au, v)_H$ pour tout $v \in H$. On définit ainsi un opérateur A sur H, qui est linéaire. Toujours par le théorème de représentation de Riesz, on peut représenter L par $l \in H$. On est donc ramener à prouver qu'il existe un unique $u \in H$ tel que

$$Au = l. \tag{4.6}$$

Observons que les hypothèses de continuité et coercivité sur a se transfèrent sur A et qu'on a

$$\|Au\|_H \le \|a\| \|u\|_H, \quad (Au, u) \ge \alpha \|u\|_H^2.$$

Soit $\rho > 0$. On définit l'application $T : H \to H$ par

$$Tu = u - \rho(Au - l).$$

L'existence d'une solution à (4.6) est équivalente à l'existence d'un point fixe pour T. Pour $u, v \in H$, on a

$$\|Tu-Tv\|_H^2 = \|u-v\|_H^2-2\rho(u-v, A(u-v))_H+\rho^2\|A(u-v)\|_H^2 \leq (1-2\rho\alpha+\rho^2\|a\|)\|u-v\|_H^2.$$

Si ρ est assez petit, l'application T est contractante et admet donc un unique point fixe d'après le théorème de Banach. Cela prouve l'existence et l'unicité de $u \in H$ tel que $Au = l$.

Supposons maintenant que a est symétrique. Soit u déterminé précédement et $v \in H$. Alors

$$J(u+v) = \frac{1}{2}a(u,u)+\frac{1}{2}a(v,v)+a(u,v)-L(u)-L(v) = J(u)+\frac{1}{2}a(v,v) \geq J(u)+\alpha\|v\|_H^2$$

Ainsi, $J(u+v) \geq J(u)$ pour tout $v \in H$ avec égalité si et seulement si $v = 0$. Ceci conclue la preuve. ■

5. Espaces de Sobolev en dimension supérieure

Dans toute la suite, Ω désignera un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$.

5.1 L'espace $H^1(\Omega)$

Comme dans le cas de la dimension 1, il est possible de définir un espace test $\mathcal{D}(\Omega)$ de fonctions lisses à support compact dans Ω et l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$. On peut également définir des dérivées partielles au sens des distributions en dimension d par analogie avec la façon dont nous avions procédé en dimension 1. Il est alors possible de définir l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme l'espace

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega) \text{ pour } i = 1, \ldots, d\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est encore un espace de Hilbert séparable. On a le résultat de densité $\overline{\mathcal{D}(\bar{\Omega})} = H^1(\Omega)$. On peut également définir

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Cependant, il n'est pas possible de déterminer la valeur sur $\partial\Omega$ des fonctions de $H_0^1(\Omega)$. En effet, contrairement au cas de la dimension 1, une fonction de $H^1(\Omega)$ n'admet pas nécessairement un représentant continu. On a toutefois les injections suivantes.

Proposition 5.1.1 — Injections de Sobolev. On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est borné et régulier, ou $\Omega = \mathbb{R}^d$. Si $d \geq 3$, on pose

$$2^* = \frac{2d}{d-2}.$$

Soit $2 \leq q < +\infty$ si $d = 2$, et $2 \leq q \leq 2^*$ si $d \geq 3$. Alors l'injection

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

est continue. Si Ω est borné, alors l'injection est également compacte.

R Dans le cadre de ce cours, on se limite au résultat d'injection ci-dessus. Pour plus de détail sur les injections de Sobolev, on pourra se reporter à un ouvrage de référence sur le sujet, par exemple [2, Chapitre IX].

5.2 Théorie des traces

Puisque $H^1(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $C(\bar{\Omega})$ en dimension supérieure à 2, il n'est pas possible de définir de manière classique la valeur des fonctions de $H^1(\Omega)$ sur le bord $\partial\Omega$. Cependant, on peut tout de même donner un sens à la trace sur le bord des fonctions d'un espace de Sobolev de la façon suivante.

Commencons par traiter le cas du demi-espace $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d, x' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0\}$. On identifie le bord $\partial\mathbb{R}^d_+$ de $\mathbb{R}^d_+$ à $\mathbb{R}^{d-1}$.

Le lemme suivant va nous permettre de définir la trace par densité.

LemmeT 5.2.1 Soit $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x', 0)|^2 dx' \leq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

On peut alors prouver le résultat suivant.

LemmeT 5.2.2 Soit $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Il existe une unique application linéaire continue $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\mathbb{R}^{d-1})$ telle que pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a $\gamma(u) = u(\cdot, 0) \equiv u_{|\partial\Omega}$. On appelle γ *l'opérateur de trace* associé à $H^1(\Omega)$ et on le notera généralement $\gamma(u) = u_{|\partial\Omega}$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On peut étendre les Lemmes 5.2.1 et 5.2.2 à tout ouvert Ω borné régulier (de classe C^1) en utilisant un système de cartes locales. Rappelons que Ω est dit *régulier de classe* C^k s'il existe un nombre fini d'ouvert $(\omega_i)_{0\leq i\leq I}$ tels que

$$\omega_0 \subset \Omega, \quad \bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{I} \omega_i, \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{I} \omega_i,$$

et que pour chaque $i = 1, \ldots, I$ il existe une application bijective ϕ_i, de classe C^k ainsi que son inverse, de

$$Q = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, |y'| < 1, |y_d| < 1\}$$

dans ω_i et telle que

$$\phi_i(Q \cap \mathbb{R}^d_+) = \omega_i \cap \Omega, \quad \phi_i(Q \cap \mathbb{R}^{d-1}) = \omega_i \cap \partial\Omega.$$

La figure 5.1 propose une illustration de cette définition. Si (U, τ) désigne une paramétrisation (éventuellement locale) de $\partial\Omega$, on définit l'espace $L^2(\partial\Omega)$ par

$$L^2(\partial\Omega) = \{f : \partial\Omega \to \mathbb{R} \mid f \circ \tau \in L^2(U)\},$$

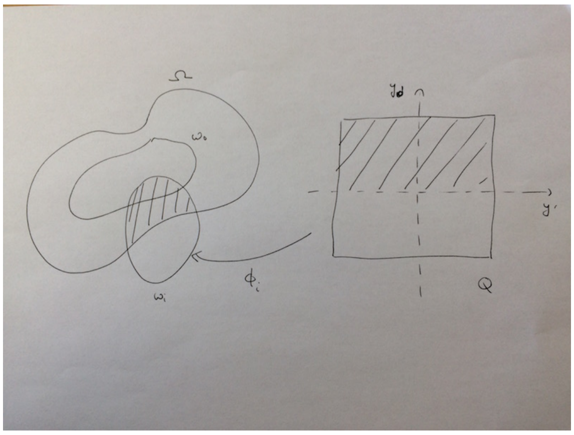

Figure 5.1: Carte locale pour un ouvert Ω régulier.

muni de la norme

$$\|f\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\sigma = \int_U |f|^2 \sqrt{|\nabla\tau(y')|^2 + 1} dy'.$$

Toute fonction de $L^2(\partial\Omega)$ n'est pas nécessairement la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$. On note

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma(H^1(\Omega)) = \{v : \partial\Omega \to \mathbb{R} \mid \text{ il existe } u \in H^1(\Omega),\ \gamma(u) = v\}.$$

Il est possible de définir des espaces de Sobolev pour des indices intérmédiaires entre 0 et 1. La notation $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ est compatible avec une telle définition (qui sort du cadre de ce document). L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ muni de la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \inf_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \gamma(u)=v}} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert, contenant les fonctions $C^1(\partial\Omega)$ et dense dans $L^2(\partial\Omega)$. Il existe un *opérateur* linéaire continu $R : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$, dit *de relèvement*, tel que $Ru_{|\partial\Omega} = u$ pour tout $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

On peut maintenant proposer une caractérisation de $H^1_0(\Omega)$ similaire à celle proposée en dimension 1.

Proposition 5.2.3 On suppose que Ω est borné et de classe C^1. Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors $u \in H^1_0(\Omega)$ si et seulement si $u_{|\partial\Omega} \equiv 0$.

Les inégalités de Poincaré et Poincaré-Wirtinger sont également valable mutatis mutandis en dimension supérieure.

Proposition 5.2.4 — Inégalités de Poincaré et Poincaré-Wirtinger. On suppose que Ω est borné et de classe C^1. Alors il existe $C = C(\Omega) > 0$ telle que pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si de plus Ω est connexe, alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$ désigne la moyenne de u sur Ω.

On rappelle que la formule d'intégration par partie en dimension 1 admet en dimension supérieure une généralisation sous le nom de *formule de Green* pour des fonctions régulières. Cette formule reste vrai pour les fonctions de $H^1(\Omega)$.

Proposition 5.2.5 — Formule de Green. On suppose que Ω est borné et de classe C^1. Soit $u, v \in H^1(\Omega)$. Alors pour tout $i = 1, \ldots, d$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uvn_i d\sigma,$$

où n_i désigne la i-ème composante de la normale extérieure unitaire $\vec{n}$ à $\partial\Omega$.

6. Problèmes Elliptiques en dimension supérieure

6.1 Problème de Helmholtz, condition de Dirichlet homogène

On reprend tout d'abord l'exemple du problème de Helmholtz, posé maintenant en dimension supérieure. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Pour un terme source donné $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on recherche une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega. \tag{6.1}$$

Comme précédemment, on associe à cette équation des conditions aux limites (sur la frontière $\partial\Omega$) similaires à celles vues en dimension 1. Par exemple, on considérera *la condition aux limites de Dirichlet (homogène)* définie par

$$u \equiv 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{6.2}$$

On peut alors reprendre le programme d'étude décrit en Section 4.

Definition 6.1.1 Une *solution classique* du problème de Helmholtz (6.1) avec condition de Dirichlet homogène (6.2) est une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (6.1)-(6.2). Une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ l'équation

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx = \int_\Omega f v dx. \tag{6.3}$$

est appelée *solution faible* de (6.1)-(6.2).

On supposera par la suite que Ω est de classe C^1.

On commence par vérifier que si u est une solution classique, alors u est une solution faible. Puisque $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et que Ω est borné, on a $u \in H^1(\Omega)$. De plus, comme Ω est de classe C^1 et que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $u \in H_0^1(\Omega)$. Enfin, par la formule de Green, pour tout

$v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega -\Delta u v dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Or, puisque $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = 0.$$

Par conséquent, u vérifie bien pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ l'égalité (6.3).

Par application directe du théorème de Lax-Milgram, on obtient le résultat suivant.

Proposition 6.1.1 — Existence et unicité d'une solution faible. Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ à (6.1)-(6.2). De plus u satisfait

$$E(u) = \min\{E(v) \mid v \in H_0^1(\Omega)\}, \qquad \text{où } E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right) dx - \int_\Omega f v dx.$$

C'est le *principe de Dirichlet*.

La régularité de la solution faible s'obtenait sans difficulté en dimension 1. En dimension supérieure, prouver la régularité de la solution faible est beaucoup plus délicat. On peut obtenir le résultat suivant, dont la preuve sera admise (voir par exemple [2, Théorème IX.25]).

Proposition 6.1.2 — Régularité de la solution faible. Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que Ω est de classe C^{m+2}. Soit $f \in H^m(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ une solution faible de (6.1)-(6.2). Alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ et on a l'estimation

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}.$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de m et Ω. En particulier, si $m > d/2$, alors $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

On suppose maintenant que Ω est classe C^{m+2} et $f \in H^m(\Omega)$ pour $m > d/2$. Étant donné une solution faible $u \in C^2(\bar{\Omega})$ de (6.1)-(6.2), on prouve que u est également une solution classique de la façon suivante. En appliquant la formule de Green à la formulation (6.3), on obtient

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Cette égalité étant vrai pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$-\Delta u + u - f = 0$$

au sens des distributions, et également au sens classique. Puisque par ailleurs $u \in H_0^1(\Omega)$ on a $u \equiv 0$ sur $\partial\Omega$. Donc u est une solution classique de (6.1)-(6.2).

6.2 Le principe du maximum

Le *principe du maximum* nous dit que, sous certaines hypothèses, la solution d'une équation aux dérivées partielles atteint son maximum sur le bord du domaine. Ce principe est connue pour les fonctions harmoniques (telles que $\Delta u = 0$) depuis les travaux de Gauss (1839). Il a ensuite été étendu (et continue de l'être) à de nombreuses autres fonctions solutions d'équations aux dérivées partielles.

Commencons par le cas de la dimension 1 et du problème de Dirichlet.

Théorème 6.2.1 — Principe du maximum en dimension 1. Soit $f \in L^2(0,1)$ et $u \in H^2(0,1)$ la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases}$$

Alors on a

$$\min\{\alpha, \beta, \inf_{]0,1[} f\} \leq u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, \sup_{]0,1[} f\}$$

pour tout $x \in]0,1[$.

En dimension supérieure, on a l'énoncé suivant.

Théorème 6.2.2 — Principe du maximum en dimension supérieure. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de classe C^1, soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u + u = f$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors

$$\min\{\inf_{\partial\Omega} u_{|\partial\Omega}, \inf_\Omega f\} \leq u(x) \leq \max\{\sup_{\partial\Omega} u_{|\partial\Omega}, \sup_\Omega f\}$$

pour tout $x \in \Omega$.

En particulier, si $u \in C(\bar{\Omega})$, on a les propriétés suivantes.

- Si $f \equiv 0$, alors $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$.
- Si $u \equiv 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Terminons par l'énoncé du principe du maximum pour le problème de Helmholtz avec condition aux limites de Neumann.

Théorème 6.2.3 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx.$$

Alors

$$\inf_{\Omega} f \leq u(x) \leq \sup_{\Omega} f$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

Bibliography

[1] Grégoire Allaire. *Page personnelle de Grégoire Allaire*. accessed 10-February-2019. 2019. URL: `http://www.cmap.polytechnique.fr/~allaire/cours_X_annee2.html` (cited on page 7).

[2] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Théorie et applications. [Theory and applications]. Masson, Paris, 1983, pages xiv+234. ISBN: 2-225-77198-7 (cited on pages 7, 30, 34).

[3] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983, page 224. ISBN: 2-225-75670-8 (cited on page 7).