M1 MAT-MApI3
EMMAI2B1
Méthodes numériques pour les EDPs

1 Distributions

Exercice 1.1. On définit une fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } x \in]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que ϕ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
2. On pose $C = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi dx\right)^{-1}$ et on définit ϕ_n par $\phi_n(x) = Cn\phi(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que ϕ_n est une suite régularisante.

Exercice 1.2 (Convergence de distributions)**.** On considère la fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\chi(x) = 1$ si $x \in [-1,1]$, $\chi(x) = 0$ sinon.

1. Dire pourquoi la fonction χ définit donc une distribution $T_\chi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et rappeler la définition de T_χ.
2. On définit la suite (χ_n) par $\chi_n(x) = \frac{n}{2}\chi(nx)$. Déterminer la limite de (χ_n) au sens des distributions (i.e. trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions (T_{χ_n}) associées à (χ_n)).
3. On définit la suite (ξ_n) par $\xi_n(x) = \chi(x-n)$. Déterminer la limite de (ξ_n) au sens des distributions (i.e. trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions (T_{ξ_n}) associées à (ξ_n)).

Exercice 1.3. On considère l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On rappelle que la fonction d'Heaviside est définie par

$$H(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0,$$

et que la distribution de Dirac δ est définie pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0).$$

1. En utilisant la définition de la dérivée d'une distribution, montrer que $H' = \delta$ au sens des distributions (i.e. la distribution $T_H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à H vérifie $(T_H)' = \delta$).
2. Trouver la valeur de $\langle \delta', v \rangle$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, où δ' est la dérivée de δ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $\delta^{(k)}$, où l'exposant (k) désigne la dérivée k-ième au sens des distributions.

Exercice 1.4. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer $(fT)'$, la dérivée du produit fT au sens des distributions.

Exercice 1.5. Soit $\alpha \in]-1,0[$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^\alpha$.

1. Rappeler pourquoi f définit une distribution sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer f' au sens classique sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Est-ce que $f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$?
3. Montrer que la dérivée de f au sens des distributions est donnée par

$$(T_f)' : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\phi(x) - \phi(-x))dx.$$

4. Que se passe-t-il si $\alpha \leq -1$ ou $\alpha \geq 0$?
5. Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$.

Exercice 1.6 (Valeur principale)**.** On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. Effectuer les rappels suivants.
   (a) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (b) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.
2. Pourquoi la fonction $x \mapsto 1/x$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.
3. On définit la distribution $\text{vp}(1/x)$, dite *valeur principale* de $1/x$, pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.$$

   (a) Montrer que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit bien une distribution.
   (b) Calculer le produit (au sens des distribution) $x\,\text{vp}(1/x)$.

Exercice 1.7. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des points distincts de $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $(\theta_j)_{1 \leq j \leq n} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\theta_j(x_k) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} désignant ici le symbole de Kronecker).
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution qui vérifie $\langle T, \phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui s'annule aux points $x_1, \ldots, x_n$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $T = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{x_j}$.

Exercice 1.8. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \phi(\sin(x)) dx.$$

1. Montrer que T est une distribution.
2. Déterminer le support de T.

Exercice 1.9. Trouver une fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle en 0 et une distribution T dont le support est réduit à $\{0\}$ et telle que $\langle T, \phi \rangle$ est non nul.

Exercice 1.10. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $E(x) = \frac{1}{2}|x|$.

1. Calculer E'' au sens des distributions.
2. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(f)$ est compact et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u = E * f$. Montrer que u est bien définie et que $u'' = f$ au sens des distributions.
   On dit que E est la *solution fondamentale* du laplacien en dimension 1.

2 Espaces de Sobolev en dimension un

Exercice 2.1. On se place sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ appartient à $H^1(I)$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'appartient pas à $H^1(I)$.

Exercice 2.2. On considère la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}} \ln(2 + x^2)}.$$

Montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2.3. Soit $I =]-1, 1[$. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de h au sens des distributions.
2. A-t-on $h \in L^2(I)$? $h \in H^1(I)$?

Exercice 2.4. Le but de cet exercice est d'étudier la limite à l'infini des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et de $H^1(\mathbb{R})$.

1. Construire une fonction u *continue et bornée* telle que $u \in L^2(\mathbb{R})$ et u n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$ on a
$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0.$$

Exercice 2.5 (Troncature des fonctions de $H^1(\mathbb{R})$)**.** On veut montrer que pour tout $u, v \in H^1(\mathbb{R})$ les fonctions $\max(u, v)$ et $\min(u, v)$ appartiennent encore à $H^1(\mathbb{R})$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$f(s) = \begin{cases} (s^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon & \text{si } s > 0, \\ 0 & \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$
Montrer que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a $f(u) \in L^2(\mathbb{R})$ et $u'f'(u) \in L^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a
$$-\int_{\mathbb{R}} f(u)\phi' dx = \int_{\{u>0\}} \phi u u'(u^2+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$
3. On pose $u^+ = \max(u, 0)$. Déduire de 2. que
$$-\int_{\mathbb{R}} u^+\phi' = \int_{\{u>0\}} \phi u' dx,$$
4. Montrer que $u^+ \in H^1(\mathbb{R})$ et déterminer $(u^+)'$.
5. Montrer que pour tout $u, v \in H^1(\mathbb{R})$ on a $\max(u, v), \min(u, v), |u| \in H^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2.6 (Espace H^2)**.** Définissons l'espace $H^2(0, 1)$ par
$$H^2(0,1) = \{u \in H^1(0,1) | u' \in H^1(0,1)\}.$$

1. Montrer que $H^2(0, 1)$ muni du produit scalaire
$$(u, v)_{H^2} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2} + (u'', v'')_{L^2}$$
est un espace de Hilbert séparable.
2. Montrer que si $u \in L^2(0, 1)$ et si $u'' \in L^2(0, 1)$, alors $u \in H^2(0, 1)$.
3. Montrer que l'application
$$u \mapsto \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
est une norme sur $H^2(0, 1)$, équivalente à la norme usuelle (engendrée par le produit scalaire défini en 1.).
4. Montrer que $H^2(0, 1)$ s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}^1([0, 1])$.

Exercice 2.7 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)**.** Soit I un intervalle borné. Pour tout $u \in H^1(I)$, on définit la moyenne $\bar{u}$ de u par
$$\bar{u} = \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx.$$
Le but de cet exercice est de montrer (inégalité de Poincaré-Wirtinger) qu'il existe une constante $C = C(|I|)$ telle que
$$\|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, périodique de période 2π et de moyenne nulle, i.e. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. Montrer que
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \tag{1}$$

2. Montrer qu'on a égalité dans (1) si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.
3. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière de moyenne nulle, i.e. $\int_0^\pi f(x)dx = 0$. Montrer que

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \leq \int_0^\pi |f'(x)|^2 dx.$$

   Exhiber ensuite un contre-exemple à l'inégalité précédente si f n'est pas de moyenne nulle.
4. En déduire l'inégalité de Poincaré-Wirtinger.

Exercice 2.8 (Inégalité de Hardy)**.** Le but de cette exercice est d'établir l'inégalité de Hardy

$$\int_0^1 \left|\frac{u(x)}{x}\right|^2 dx \leq 4 \int_0^1 |u'(x)|^2 dx,$$

pour toute fonction $u \in H^1(0,1)$ telle que $u(0) = 0$.

1. Montrer que si $u(0) \neq 0$, alors $x \mapsto \frac{u(x)}{x}$ n'est pas dans $L^2(0,1)$.
2. Soit $u \in H^1(0,1)$ telle que $u(0) = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1])$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(0,1)$ lorsque $n \to +\infty$ (où $\mathcal{D}(]0,1])$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]0,1]$).
3. Soit v in $\mathcal{D}(]0,1])$. Montrer que

$$\int_0^1 \left|\frac{u(x)}{x}\right|^2 dx \leq 2 \int_0^1 |u'(x)|^2 dx,$$

4. En déduire l'inégalité pour toute fonction $u \in H^1(0,1)$ telle que $u(0) = 0$.

3 Problèmes aux limites en dimension un

Exercice 3.1 (Problème de Helmholtz avec condition de Neumann homogène)**.** Soit $f \in L^2(0,1)$. On souhaite résoudre sur $I =]0,1[$ le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et si $u \in \mathcal{C}^2$ est une solution classique de (2) alors pour tout $v \in H^1(0,1)$ on a

$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fv dx.$$

2. Pour $u, v \in H^1(0,1)$, on définit

$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)dx, \quad L(v) = \int_0^1 fv dx.$$

   Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que pour tout $v \in H^1(0,1)$ on a

$$a(u,v) = L(v).$$

3. Montrer que $u'' = u - f$ au sens des distributions et en déduire que $u \in H^2(0,1)$.
4. Peut-on définir $u'(0)$ et $u'(1)$? Si oui, déterminer leur valeur.
5. Conclure.

Exercice 3.2 (Problème de Helmholtz avec condition de Neumann non-homogène)**.** Soit $f \in L^2(0,1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre sur $I =]0,1[$ le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta. \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et si $u \in \mathcal{C}^2$ est une solution classique de (2) alors pour tout $v \in H^1(0,1)$ on a
$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fv dx - \alpha v(0) + \beta v(1).$$
2. En déduire une forme bilinéaire a et une forme linéaire L adaptées au problème (3).
3. Reprendre la démarche de l'Exercice 3.1 pour résoudre le problème (3).

Exercice 3.3 (Problème de Helmholtz avec condition aux limites périodiques)**.** Soit $f \in L^2(0,1)$. On souhaite résoudre sur $I =]0,1[$ le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{4}$$

1. Donner une formulation faible de (4).
2. En déduire un espace fonctionnel adapté à la prise en compte des conditions aux limites périodiques.
3. Résoudre le problème (4).

Exercice 3.4 (Problème de Poisson avec condition de Neumann)**.** Soit $I =]0,1[$ et $f \in L^2(I)$ à moyenne nulle, i.e. $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

1. Pour $u, v \in H^1(0,1)$ on définit
$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \left(\int_0^1 u(x)dx\right)\left(\int_0^1 v(x)dx\right), \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$
(i) Montrer qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram (indication : faire intervenir l'inégalité de Poincaré-Wirtinger).
(ii) Montrer que la solution obtenue par le théorème de Lax-Milgram vérifie le problème de Poisson avec condition de Neumann
$$\begin{cases} -u'' = f, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ \int_0^1 u(x)dx = 0. \end{cases}$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose désormais
$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \alpha(v(0) - v(1)).$$
Montrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique de nouveau et identifier le problème satisfait par la formulation variationnelle associée.

Exercice 3.5 (Problème de Helmholtz avec condition aux limites de Fourier-Robin)**.** Soit $I =]0,1[$, $f \in L^2(I)$ et $\lambda > 0$. Pour $u, v \in H^1(0,1)$ on définit

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + \lambda u(0)v(0) + \lambda u(1)v(1), \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Montrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique et identifier le problème satisfait par la formulation variationnelle associée.

Exercice 3.6 (Problème de convection-diffusion)**.** On se place sur l'intervalle $]0,1[$. Soit $f \in L^2(0,1)$ et $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \gamma u' = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. Determiner la formulation variationnelle associée à (5).

2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $v \in H_0^1(0,1)$ on a

$$\int_0^1 vv' dx = 0.$$

3. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible u à (5).
4. Montrer que la solution faible u est telle que $u'' \in L^2(0,1)$.
5. Montrer que la solution faible u ne minimise pas dans $H_0^1(0,1)$ la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\nabla u|^2 + \gamma u u'\right) dx - \int_0^1 f u dx.$$

Exercice 3.7 (Problèmes aux limites d'ordre 4)**.** *On admettera dans cet exercice les résultats de l'Exercice 2.6.* Soit $I =]0,1[$, $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

1. On considère le problème

$$\begin{cases} u^{(4)} + u = f, \\ u''(0) = u'''(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

   1. Déterminer une formulation faible de (6) (on fera intervenir l'espace $H^4(0,1)$).
   2. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in H^4(0,1)$ à la formulation faible de (6).
   3. Montrer que u vérifie (6) au sens classique.

4. On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} u^{(4)} + u = f, \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

   Montrer (7) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$.

Exercice 3.8. Pour $u \in L^2(0,1)$, on note u' la dérivée de u au sens des distributions. On considère l'espace W défini par

$$W = \{u \in L^2(0,1) : \sqrt{x}u' \in L^2(0,1)\}.$$

On munit W de la norme

$$\|u\|_W = \left(\int_0^1 \left(x|u'(x)|^2 + |u(x)|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On désigne par W_0 l'adhérence (pour la norme définie ci-dessus) de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans W. On définit aussi sur W la semi-norme

$$|u|_W = \left(\int_0^1 x|u'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Soit $T_n \subset \mathcal{D}'(]0,1[)$.
   (a) Rappeler la définition de la convergence d'une suite dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$.
   (b) On suppose que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$. Montrer que $(\sqrt{x}T_n')$ converge vers $\sqrt{x}T'$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$.
2. Montrer que W et W_0 sont des espaces de Hilbert.
3. En partant de la relation

$$v(x) = -\int_x^1 v'(y)dy,$$

   montrer que pour tout $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ et pour tout $x \in]0,1]$ on a les inégalités suivantes

$$|v(x)| \leq |\ln(x)|^{\frac{1}{2}}|v|_W, \quad \|v\|_{L^2} \leq |v|_W.$$

4. En déduire que
   (a) $\|\cdot\|_W$ et $|\cdot|_W$ sont deux normes équivalentes sur W_0,

(b) $1 \notin W_0$.

5. On pose $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $g^\alpha \in W$?
6. On définit l'application $\Phi : v \mapsto g^{-\frac{1}{2}} v$.
   (i) Montrer que Φ est continue de W_0 muni de la norme $|\cdot|_W$ vers $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$.
   (ii) En déduire que $W_0 \subset \mathcal{C}(]0,1])$ et que $W_0 \subset \{v \in W : v(1) = 0\}$.
7. Soit $f \in W$ donné. Montrer qu'il existe un unique $u \in W_0$ tel que pour tout $v \in W_0$ on a
$$\int_0^1 x u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 x f'(x) v'(x) dx.$$
8. Déterminer les solutions $w \in W$ de l'équation différentielle
$$(xw')' = 0.$$
9. Déduire de 8 que la fonction u trouvé en 7 vérifie $u(x) = f(x) - f(1)$.
10. On désigne par $\mathbb{P}_0$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$. Montrer les relations suivantes :
$$W = W_0 \oplus \mathbb{P}_0, \quad W \subset \mathcal{C}(]0,1]), \quad W_0 = \{v \in W, v(1) = 0\}, \quad W_0 \not\subset \mathcal{C}([0,1]).$$
11. Montrer que W est l'adhérence de $\mathcal{D}([0,1])$ pour la norme $\|\cdot\|_W$.

Exercice 3.9. Soit $I =]0,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit la subdivision de $[0,1]$
$$0 = x_0 < \cdots < x_i = \frac{i}{N} < \cdots < x_N = 1.$$
On note par V_N l'ensemble des fonctions $u \in H_0^1(0,1)$ telles que les restrictions $u_{|[x_i, x_{i+1}]}$ sont affines pour tout $i = 0, \ldots, N-1$. Soit $H \subset H_0^1(0,1)$. On considère le problème suivant :
$$u \in H, \quad \int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 v(x) dx \text{ pour tout } v \in H. \tag{8}$$

1. On suppose que $H = H_0^1(0,1)$. Montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ vérifiant (8). Montrer que $u \in H^2(0,1)$.
2. Construire une base de V_N. En déduire la dimension de V_N.
3. On suppose que $H = V_N$. Écrire le problème (8) sous forme matriciel.
4. Montrer que si u_N est solution de (8) avec $H = V_N$ et si u est la solution trouvée en 1., alors il existe $C > 0$ indépendante de N telle que
$$\|u - u_N\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{C}{N}.$$

4 Espaces de Sobolev en dimension supérieure

Exercice 4.1 (Injection - Contre-exemple)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. On considère la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}^2$ par
$$f(x) = \ln\left|\ln \frac{|x|}{4}\right|.$$

1. Montrer que $f \in H^1(\Omega)$.
2. En déduire que $H^1(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Exercice 4.2 (Trace - Contre-exemple)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. On veut montrer qu'il n'y a pas de notion de trace possible pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\Omega)$ on a
$$\|u_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}$$
Dans ce but, construire une suite de fonctions $(u_n) \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n|_{\partial\Omega} \equiv 1$ mais $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$.

Exercice 4.3 (Formule de Green)**.** Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$. Montrer que

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Exercice 4.4 (Lemme de compacité de Strauss (1977))**.** Soit $d \geq 2$. On désigne par $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^d)$ à symmétrie radiale, i.e.

$$H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) | \exists v : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ t.q. } u(x) = v(|x|) \text{ p.p.}\}$$

Le but de cet exercice est de montrer que l'injection

$$H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d) \text{ pour } 2 < q < 2^*, \text{ où } 2^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } d = 2, \\ \frac{2d}{d-2} & \text{si } d \geq 3, \end{cases}$$

est compacte.

1. Montrer que si on enlève l'hypothèse de symmétrie radiale, alors l'injection $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ pour $2 < q < 2^*$ n'est pas compacte.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^{\frac{d-1}{2}} |u(x)| \leq C \|u\|_{H^1}.$$

   Commencer par $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ puis étendre à $H^1(\mathbb{R}^d)$ par densité.
3. Soit (u_n) une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et une sous-suite (u_{n_k}) tels que (u_{n_k}) converge vers u dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $2 < q < 2^*$.

Exercice 4.5 (Inégalité de Moser-Trudinger)**.** Soit $R > 0$, $\alpha > 0$, $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. On souhaite montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{\|\nabla u\|_{L^2} \leq 1 \\ u \in H^1(\Omega)}} \int_\Omega e^{\alpha |u|^2} dx \begin{cases} \leq C|\Omega| & \text{si } \alpha \leq 4\pi, \\ = +\infty & \text{si } \alpha > 4\pi. \end{cases} \tag{11}$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\|\nabla u\|_{L^2} \leq 1$. Par simplicité, on suppose que u est de classe $\mathcal{C}^1$ et que u est radiale et décroissante, i.e. il existe $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante tel que $u(x) = v(|x|)$ pour tout $x \in \Omega$.

1. On effectue le changement de variable et de fonctions

$$|x| = Re^{-\frac{t}{2}}, \quad w(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} v(|x|) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} u(x).$$

   (i) Montrer que

$$\int_\Omega e^{\alpha |u|^2} dx = |B_R| \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{4\pi} |w(t)|^2 - t\right) dt, \quad \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |w'(t)|^2 dt.$$

   (ii) Montrer que

$$w(0) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} w'(t) = 0, \quad |w'(t)| \leq \sqrt{t}.$$

2. Montrer que (11) est vrai dans le cas $\alpha < 4\pi$.
3. En utilisant la suite (dite de Moser) définie par

$$w_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq t \leq n, \\ \sqrt{n} & \text{si } n < t, \end{cases}$$

   Montrer que (11) est vrai dans le cas $\alpha > 4\pi$.

Le cas critique $\alpha = 4\pi$ ne sera pas traité dans cet exercice.

Exercice 4.6. On veut montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{2+\frac{4}{d}} dx \leq K \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq 1} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)$$

1. Soit $Q = [0,1]^d$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(Q)$ on a

$$\int_Q |u|^{2+\frac{4}{d}} dx \leq K \left(\int_Q |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}} \left(\int_Q (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)$$

2. En déduire le résultat souhaité.

5 Problèmes aux limites en dimension supérieure

Exercice 5.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω. On définit l'espace H par

$$H = \left\{ U \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) | \operatorname{div} U = 0 \right\}.$$

Les composantes d'un vecteur $U \in H$ seront notées (u_1, u_2). On notera par ∇U le gradient de U et par DU le gradient symétrique de U, i.e.

$$\nabla U = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq 2}, \quad DU = \nabla U + (\nabla U)^T$$

1. Montrer que H muni de la norme

$$\|U\|_H = \left(\|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

   est un espace de Hilbert.

2. Soit $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On définit la notation (produit contracté) de deux matrices carrées de tailles $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ par

$$A : B = \operatorname{Tr}(A^T \cdot B) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}.$$

   Montrer qu'il existe un unique $U \in H$ tel que

$$\int_\Omega DU : DV dx = \int_\Omega F \cdot V dx$$

   pour tout $V \in H$.

Exercice 5.2. On pose $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, on considère le problème

$$\begin{cases} u_n - \frac{1}{n} \Delta u_n = f & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

1. Donner la formulation variationnelle de (12).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le problème (12) admet une unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer les estimations

$$\|u_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|\nabla u_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

4. En déduire que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega u_n v dx \to \int_\Omega f v dx \text{ quand } n \to +\infty.$$

5. Montrer que pour tout $g \in L^2(\Omega)$, on a
$$\int_\Omega u_n g dx \to \int_\Omega f g dx \text{ quand } n \to +\infty.$$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a
$$\int_\Omega (u_n - f)^2 dx \leq 2 \int_\Omega f^2 dx - 2 \int_\Omega f u_n dx.$$
7. En déduire que $u_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 5.3 (Problème de convection-diffusion)**.** Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ et $V : \Omega \to \mathbb{R}^d$ régulière telle que $\operatorname{div} V = 0$. On considère le problème de convection-diffusion
$$\begin{cases} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{13}$$
1. Determiner la formulation variationnelle associée à (13).
2. Montrer que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a
$$\int_\Omega v V \cdot \nabla v dx = 0.$$
3. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible u à (13).
4. Montrer que la solution faible u est telle que $\Delta u \in L^2(\Omega)$.
5. Montrer que la solution faible u ne minimise pas dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle
$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u V \cdot \nabla u\right) dx - \int_\Omega f u dx.$$

Exercice 5.4 (Problème de conduction)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et K un compact connexe inclus dans Ω. On suppose que $\Omega \setminus K$ est régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème (dit de conduction en raison de son origine physique) décrit par
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus K, \\ u = C & \text{sur } \partial K, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \end{cases} \tag{14}$$
où u est une fonction inconnue et C une constante dont la valeur n'est pas fixée et dépend de u.
1. Déterminer la formulation variationnelle associée à (14) (on introduira un espace fonctionnel adapté pour tenir compte des conditions au bord).
2. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible u à (14).
3. Montrer que la solution faible u est telle que $\Delta u \in L^2(\Omega \setminus K)$.
4. Sachant que pour tout $v \in H^1(\Omega \setminus K)$ tel que $\Delta v \in L^2(\Omega \setminus K)$ on a $v \in H^2(\Omega \setminus K)$, montrer que la solution faible u vérifie $\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$.

6 Problèmes d'examens

Exercice 6.1. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.
1. (½ point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. (½ point) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.

3. (½ point) Donner un exemple de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui ne peut pas être représentée par une fonction de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Exercice 6.2. Soit $I =]0,1[$. On rappelle que $\mathcal{D}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans I et que $H^1(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de $L^2(I)$ dont la dérivée au sens des distributions est également dans $L^2(I)$.

1. (1 point) Rappeler la définition de l'espace de Sobolev $H^1_0(I)$.
2. Soit $u \in \mathcal{D}(I)$.
   (a) (½ point) Montrer que pour tout $x \in I$ on a
   $$u(x) = \int_0^x u'(s)ds, \quad u(x) = \int_1^x u'(s)ds.$$
   (b) (½ point) En déduire que
   $$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(s)|ds.$$
   (c) (1 point) En déduire que
   $$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$
3. (½ point) Soit $v \in H^1_0(I)$. Montrer que
   $$\|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2(I)}.$$
4. Soit $c \in L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ (le signe de c_0 n'est pas prescrit) tel que pour tout $x \in I$ on a
   $$c(x) \geq c_0.$$
   On définit sur $H^1_0(I)$ la forme bilinéaire
   $$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I c(x)u(x)v(x)dx.$$
   (a) (½ point) Montrer que a est continue.
   (b) (½ point) Rappeler la définition d'une forme bilinéaire coercive.
   (c) (1 point) Montrer que si $c_0 > -4$, alors a est coercive sur $H^1_0(I)$.
   (d) (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. Montrer que le problème variationel
   $$\forall v \in H^1_0(I), \quad a(u,v) = \int_I f(x)v(x)dx$$
   admet une unique solution $u \in H^1_0(I)$.

Exercice 6.3. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. (1 point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. (1 point) Étant donné $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.
3. (1 point) À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto |x|^\alpha$ définit-elle une distribution ?

Exercice 6.4. On se place sur l'intervalle $]0,1[$. Soit $f \in L^2(0,1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés. On considère le problème
$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases} \tag{P}$$

1. (2 points) On définit l'espace

$$H_{\alpha,\beta} = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

À quelles conditions sur α et β l'espace $H_{\alpha,\beta}$ est-il un espace de Hilbert ? On commencera par chercher les valeurs de α et β pour lesquelles H est un espace vectoriel.

2. (3 points) Soit $g \in L^2(0,1)$. Pour $u, v \in H^1(0,1)$, on définit

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 g(x)v(x)dx.$$

   (a) Montrer que a et L sont continues sur $H^1(0,1)$.
   (b) Donner un contre-exemple montrant que a n'est pas coercive sur $H^1(0,1)$.
   (c) Montrer que a est coercive sur $H_0^1(0,1)$.

3. (2 points) Rappeler l'énoncé du théorème de Lax-Milgram.
4. (1 point) Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram à a et L dans l'espace $H^1(0,1)$? Dans l'espace $H_0^1(0,1)$? Dans l'espace $H_{\alpha,\beta}$ si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$?
5. (1 point) Construire une fonction affine $u_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que $u_{\alpha,\beta}(0) = \alpha$ et $u_{\alpha,\beta}(1) = \beta$.
6. (1 point) On suppose maintenant $u_{\alpha,\beta}$ est donnée. Montrer que si u est solution de (P), alors $\tilde{u} = u - u_{\alpha,\beta}$ vérifie

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f + u''_{\alpha,\beta}, \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0. \end{cases} \tag{P$_{\text{mod}}$}$$

7. (2 points) Montrer qu'il existe une unique solution $\tilde{u} \in H_0^1(0,1)$ au problème (P$_{\text{mod}}$). En déduire l'existence d'une unique solution $u \in H^1(0,1)$ au problème (P).
8. (1 point) Montrer que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Exercice 6.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $\partial\Omega$ sa frontière. On notera les composantes de $x \in \mathbb{R}^2$ par $x = (x_1, x_2)$. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

1. (1 point) Soit $u, v \in H^1(\Omega)$. Compléter la formule de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx = \dots.$$

2. (3 points) Soit $w \in H^2(\Omega)$ une solution du problème

$$-\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x_1} = f \text{ dans } \Omega, \quad w = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Définir une forme bilinéaire a, une forme linéaire L et un espace fonctionnel H tels que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées et tels que pour tout $v \in H$, on a

$$a(w,v) = L(v).$$

Le fait que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées devra être justifié. On pourra faire intervenir l'inégalité de Poincaré : il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Exercice 6.6. Soit $I =]0,1[$. On définit l'espace

$$H_g^1(I) = \left\{u \in H^1(I) : u(0) = 0\right\}.$$

1. (1 point) Montrer que $H_g^1(I)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$.

2. (1 point) On note $\mathcal{D}(]0,1])$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]0,1]$. Montrer que $\mathcal{D}(]0,1])$ est dense dans $H^1_g(I)$ (on pourra s'appuyer sur la densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1_0(I)$).
3. (a) (1 point) Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1])$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 \phi^2(x)dx \leq C \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx.$$

   (b) (1 point) En déduire que pour tout $u \in H^1_g(I)$ on a

$$\|u\|^2_{L^2(I)} \leq C\|u'\|^2_{L^2(I)}.$$

4. On définit sur $H^1_g(I)$ la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I u'(x)v(x)dx.$$

   (a) (1 point) La forme bilinéaire a est-elle symétrique (justifier votre réponse) ?
   (b) (1 point) Montrer que a est continue et coercive sur $H^1_g(I)$.
5. (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. On définit la forme linéaire L sur $H^1_g(I)$ par

$$L(v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

   Montrer que L est continue.
6. (1 point) Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1_g(I)$ tel que pour tout $v \in H^1_g(I)$ on a

$$a(u,v) = L(v).$$

7. (1 point) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u au sens des distributions.
8. (1 point) Montrer que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.
9. (1 point) Calculer $u'(1)$.
10. (1 point) Écrire le problème aux limites vérifié par u.

Exercice 6.7. Soient deux fonctions $f \in L^2(0,1)$ et $\alpha \in L^\infty(0,1)$ telle que $\alpha(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in [0,1]$. On considère une forme bilinéaire a et une forme linéaire L définies pour $u, v \in H^1(0,1)$ par

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \alpha(x)u(x)v(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

On désigne par V_0 et V_ε pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ les sous-espaces de $H^1(0,1)$ suivants :

$$V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}, \quad V_\varepsilon = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = \varepsilon v(1)\}.$$

1. (a) Montrer que V_0 et V_ε munies de la norme induite par celle de $H^1(0,1)$ sont des espaces de Hilbert.
   (b) Montrer que a et L sont continues sur V_0 et V_ε.
2. (a) Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout $v \in V_0$ on a

$$\|v\|_{L^2} \leq C_1\|v'\|_{L^2}. \tag{15}$$

   (b) En déduire l'existence d'un unique $u_0 \in V_0$ tel que pour tout $v \in V_0$ on a

$$a(u_0, v) = L(v). \tag{16}$$

3. (a) Montrer que, au sens des distributions, u_0 vérifie une équation différentielle du second ordre.
   (b) En déduire que $u_0 \in H^2(0,1)$.

(c) En déduire également que pour tout $v \in V_0$ on a

$$a(u_0, v) - L(v) = u'(1)v(1).$$

(d) Déduire de (c) que u_0 vérifie une équation différentielle du second ordre avec *deux* conditions au bord.

(e) Montrer que si $\tilde{u}_0$ est une autre solution de l'équation différentielle avec conditions aux bords vérifiée par u_0, alors pour tout $v \in V_0$ on a

$$a(\tilde{u}_0, v) = L(v).$$

4. Soit $v \in V_\varepsilon$ et w définie par $w(x) = v(x) - v(0)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

   (a) Observer que $w \in V_0$ et en déduire l'existence d'une constante C_2 *indépendante de* ε *et de* v telle que

   $$\|v\|_{L^2} \leq C_2 \|v'\|_{L^2}. \tag{17}$$

   (b) En déduire l'existence d'un unique $u_\varepsilon \in V_\varepsilon$ tel que pour tout $v \in V_\varepsilon$ on a

   $$a(u_\varepsilon, v) = L(v). \tag{18}$$

5. En reprenant les étapes de la question 3, montrer que u_ε peut être caractérisé comme la solution d'une équation différentielle du second ordre avec conditions aux limites.

6. (a) Montrer qu'il existe une constant C_3 indépendante de ε telle que

   $$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C_3 \|f\|_{L^2}. \tag{19}$$

   (b) En déduire l'existence d'une constante C_4 telle que

   $$|u_\varepsilon(0)| \leq C_4 \varepsilon. \tag{20}$$

7. Le but de cette question est de montrer que

   $$u_\varepsilon \to u_0 \text{ dans } H^1(0, 1) \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

   Pour $u \in H^1(0, 1)$, on pose

   $$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha(x)|u(x)|^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx.$$

   (a) Quelle hypothèse supplémentaire du théorème de Lax-Milgram permet de conclure que

   $$J(u_0) = \min_{v \in V_0} J(v), \quad J(u_\varepsilon) = \min_{v \in V_\varepsilon} J(v).$$

   (b) Soit v_ε définie par $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0)$. En remarquant que $v_\varepsilon \in V_0$, montrer que

   $$J(v_\varepsilon) \geq J(u_0). \tag{21}$$

   (c) En utilisant (20), montrer qu'il existe C_5 indépendante de ε telle que

   $$J(u_\varepsilon) \geq J(v_\varepsilon) - C_5 \varepsilon.$$

   (d) Soit w_ε défini par $w_\varepsilon(x) = u_0(x) + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_0(1)$. Vérifier que $w_\varepsilon \in V_\varepsilon$ et montrer qu'il existe C_6 indépendante de ε telle que

   $$J(u_0) \geq J(w_\varepsilon) - C_6 \varepsilon \geq J(u_\varepsilon) - C_6 \varepsilon \geq J(v_\varepsilon) - (C_5 + C_6)\varepsilon. \tag{22}$$

   (e) Déduire des questions précédentes que $J(u_\varepsilon) \to J(u_0)$ quand $\varepsilon \to 0$.

   (f) Montrer que $u_\varepsilon \to u_0$ dans $H^1(0, 1)$ quand $\varepsilon \to 0$.