1 Distributions

Exercice 1.1. On définit une fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } x \in]-1,1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que ϕ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Solution: On rappelle que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\text{supp}(\phi)$ est compact. Le support de ϕ est $[-1,1]$ et est donc bien compact. En dehors de $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par définition, $\phi^{(k)} \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{\substack{x \to \pm 1 \\ x \in]-1,1[}} \phi^{(k)}(x) = 0.$$

On commence par montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la k-ième dérivée de ϕ est de la forme

$$\phi^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(x^2-1)^{2k}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$$

pour tout $x \in]-1,1[$, où les (P_k) sont des polynômes à coefficients réels. En effet, on peut raisonner par récurrence. L'initialisation de la récurrence à $k = 0$ est immédiate avec $P_0 = 1$. On suppose que la propriété est vrai pour $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} \phi^{(k+1)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_k(x)}{(x^2-1)^{2k}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right) \\ &= \left(\frac{P_k'(x)}{(x^2-1)^{2k}} - \frac{4kxP_k(x)}{(x^2-1)^{2k+1}} - \frac{2xP_k(x)}{(x^2-1)^{2(k+1)}}\right) \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) \\ &= \frac{P_{k+1}(x)}{(x^2-1)^{2(k+1)}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), \end{aligned}$$

où on a posé

$$P_{k+1}(x) = (x^2-1)^2 P_k'(x) - (4k(x^2-1)+2)xP_k(x).$$

C'est bien le résultat souhaité.
Étant donné la forme de $\phi^{(k)}$, le fait que

$$\lim_{\substack{x \to \pm 1 \\ x \in]-1,1[}} \phi^{(k)}(x) = 0$$

est une conséquence du théorème des croissances comparées.

2. On pose $C = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi dx\right)^{-1}$ et on définit ϕ_n par $\phi_n(x) = Cn\phi(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que ϕ_n est une suite régularisante.

Solution: On rappelle que la suite (ϕ_n) est dite régularisante si elle est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a

$$\phi_n \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \phi_n dx = 1, \quad \operatorname{supp}(\phi_n) \subset [-r_n, r_n],$$

avec $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$. Puisque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a bien $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a $\phi \geq 0$ et donc $\phi_n \geq 0$. Par le changement de variable $y = nx$ et par définition de C, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = Cn \int_{\mathbb{R}} \phi(nx)dx = C \int_{\mathbb{R}} \phi(y)dy = 1.$$

Le support de ϕ est $[-1, 1]$. Puisque $nx \in [-1, 1]$ lorsque $x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, le support de ϕ_n est $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ et on a bien sûr $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. La suite (ϕ_n) est donc une suite régularisante.

Exercice 1.2 (Convergence de distributions)**.** On considère la fonction $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\chi(x) = 1$ si $x \in [-1, 1]$, $\chi(x) = 0$ sinon.

1. Dire pourquoi la fonction χ définit donc une distribution $T_\chi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et rappeler la définition de T_χ.

Solution: La fonction χ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, elle définit une distribution T_χ, donnée pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par la formule

$$\langle T_\chi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\phi(x)dx.$$

2. On définit la suite (χ_n) par $\chi_n(x) = \frac{n}{2}\chi(nx)$. Déterminer la limite de (χ_n) au sens des distributions (i.e. trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions (T_{χ_n}) associées à (χ_n)).

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En effectuant notamment le changement de variable $y = nx$, on a

$$\langle T_{\chi_n}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi_n(x)\phi(x)dx = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \chi(nx)\phi(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

Pour tout $y \in [-1, 1]$, on a la convergence (simple) $\phi\left(\frac{y}{n}\right) \to \phi(0)$ lorsque $n \to +\infty$. Par ailleurs, ϕ étant dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, elle est en particulier continue et donc bornée sur $[-1, 1]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy = \int_{-1}^{1} \phi(0)\, dy = 2\phi(0).$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_{\chi_n}, \phi \rangle = \phi(0).$$

Donc T_{χ_n} converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vers la distribution de Dirac δ.

3. On définit la suite (ξ_n) par $\xi_n(x) = \chi(x - n)$. Déterminer la limite de (ξ_n) au sens des distributions (i.e. trouver la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions (T_{ξ_n}) associées à (ξ_n)).

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\xi_n(x) = 1$ si $x \in [-1 + n, 1 + n]$, $\xi_n(x) = 0$ sinon. Par conséquent, on a

$$\langle T_{\xi_n}, \phi \rangle = \int_{-1+n}^{1+n} \phi(x)dx = \int_{-1}^{1} \phi(y + n)dy.$$

Or la suite de fonctions $(\phi(\cdot + n))$ converge simplement vers la fonction nulle $x \mapsto 0$ et elle est de plus majorée (car continue et à support compact). Par le théorème de convergence dominée, on a

donc
$$\lim_{n\to+\infty}\langle T_{\xi_n},\phi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1}\phi(y+n)dy = 0.$$
Par conséquent, $\xi_n \to 0$ au sens des distributions lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 1.3. On considère l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On rappelle que la fonction d'Heaviside est définie par
$$H(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad H(x) = 1 \text{ si } x \geq 0,$$
et que la distribution de Dirac δ est définie pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par
$$\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0).$$

1. En utilisant la définition de la dérivée d'une distribution, montrer que $H' = \delta$ au sens des distributions (i.e. la distribution $T_H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à H vérifie $(T_H)' = \delta$).

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par définition de la dérivée au sens des distributions et en utilisant le fait que ϕ est à support compact, on a
$$\langle (T_H)', \phi\rangle = -\langle T_H, \phi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)dx = -\int_0^{+\infty}\phi'(x)dx = -[\phi(x)]_0^{\infty} = \phi(0).$$
On a donc bien $H' = \delta$ au sens des distributions.

2. Trouver la valeur de $\langle \delta', v\rangle$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, où δ' est la dérivée de δ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Solution: Pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a
$$\langle \delta', v\rangle = -\langle \delta, v'\rangle = -v'(0).$$

3. Déterminer $\delta^{(k)}$, où l'exposant (k) désigne la dérivée k-ième au sens des distributions.

Solution: Montrons par récurrence que pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\langle \delta^{(k)}, v\rangle = (-1)^k v^{(k)}(0).$$
Il est clair que la propriété est vraie à l'ordre 0 et nous avons vu à la réponse précédente qu'elle était également vraie à l'ordre 1. Supposons que la propriété est vraie à l'ordre $k \in \mathbb{N}$. On a alors
$$\langle \delta^{(k+1)}, v\rangle = -\langle \delta^{(k)}, v'\rangle = -(-1)^k (v')^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} v^{(k+1)}(0).$$
Donc la propriété est également vérifiée à l'ordre $k+1$, ce qui conclue le raisonnement.

Exercice 1.4. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Déterminer $(fT)'$, la dérivée du produit fT au sens des distributions.

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En utilisant la définition de la dérivée au sens des distributions ainsi que la définition du produit d'une distribution avec une fonction lisse, on obtient
$$\langle (fT)', \phi\rangle = -\langle fT, \phi'\rangle = -\langle T, f\phi'\rangle.$$
En remarquant que
$$f\phi' = (f\phi)' - f'\phi$$

et utilisant les mêmes arguments que précédement, on obtient

$$\langle (fT)', \phi\rangle = -\langle T, (f\phi)'\rangle + \langle T, f'\phi\rangle = \langle T', f\phi\rangle + \langle f'T, \phi\rangle = \langle fT', \phi\rangle + \langle f'T, \phi\rangle$$
$$= \langle fT' + f'T, f\phi\rangle.$$

Ainsi, la dérivée du produit fT au sens des distributions est donnée par la formule

$$(fT)' = fT' + f'T.$$

Exercice 1.5. Soit $\alpha \in]-1, 0[$ et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|^\alpha$.

1. Rappeler pourquoi f définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Solution: Puisque $\alpha \in]-1, 0[$, la fonction f est dans l'espace $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et elle définit donc bien une distribution T_f, donnée pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle T_f, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx.$$

2. Déterminer f' au sens classique sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Est-ce que $f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$?

Solution: Au sens classique, la fonction f est dérivable pour tout $x \neq 0$ et sa dérivée est donnée par la formule

$$f'(x) = \alpha\,\text{sgn}(x)|x|^{\alpha-1}.$$

Puisque $\alpha \in]-1, 0[$, on a $\alpha - 1 < 1$ et donc $f' \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que la dérivée de f au sens des distributions est donnée par

$$(T_f)' : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\phi(x) - \phi(-x))dx.$$

Solution: Remarquons tout d'abord que puisque $f' \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, f' ne définit pas une distribution et on ne peut pas avoir $(T_f)' = T_{f'}$.
Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle (T_f)', \phi\rangle = -\langle T_f, \phi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} |x|^\alpha \phi'(x)dx$$
$$= -\int_{-\infty}^0 |x|^\alpha \phi'(x)dx - \int_0^{+\infty} |x|^\alpha \phi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} |x|^\alpha (\phi'(x) + \phi'(-x))dx.$$

On souhaite intégrer par partie mais la singularité en 0 de f' pose problème. Dans un premier temps, on choisit $\varepsilon > 0$ et on calcule

$$\int_\varepsilon^{+\infty} |x|^\alpha (\phi'(x) + \phi'(-x))dx$$
$$= [|x|^\alpha(\phi(x) - \phi(-x))]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty} \alpha|x|^{\alpha-1}(\phi(x) - \phi(-x))dx.$$

Puisque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le support de ϕ est compact et donc $\phi(x) = 0$ pour $|x|$ suffisament grand. De plus, par le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$ il existe $0 < c < x$ tel que

$$\phi(x) - \phi(-x) = x(\phi'(c) + \phi'(-c)).$$

On en déduit pour tout $x > 0$ l'estimation

$$|\phi(x) - \phi(-x)| \leq 2x\|\phi'\|_{L^\infty}.$$

Cela implique que lorsque $\varepsilon \to 0$ on a

$$|\varepsilon|^\alpha(\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) \to 0.$$

On a également

$$\left||x|^{\alpha-1}(\phi(x) - \phi(-x))\right| \leq 2|x|^\alpha\|\phi'\|_{L^\infty},$$

et la fonction est donc intégrable en 0. Par conséquent, en prenant la limite $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} |x|^\alpha(\phi'(x) + \phi'(-x))dx = -\int_0^{+\infty} \alpha|x|^{\alpha-1}(\phi(x) - \phi(-x))dx,$$

et donc

$$\langle (T_f)', \phi\rangle = \alpha \int_0^{+\infty} |x|^{\alpha-1}(\phi(x) - \phi(-x))dx.$$

4. Que se passe-t-il si $\alpha \leq -1$ ou $\alpha \geq 0$?

Solution: Lorsque $\alpha \leq -1$, la fonction f elle-même n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et ne définit donc pas une distribution. Lorsque $\alpha \geq 0$, f et f' sont toutes les deux dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et on est alors dans le cadre classique où $(T_f)' = T_{f'}$.

5. Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$.

Solution: On reprend la même ligne pour calculer $(T_{\ln})'$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\langle (T_{\ln})', \phi\rangle = -\langle T_{\ln}, \phi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \ln(x)(\phi'(x) + \phi'(-x))dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En intégrant par partie on obtient

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \ln(x)(\phi'(x) + \phi'(-x))dx = [\ln(x)(\phi(x) - \phi(-x))]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}dx.$$

Comme précédemment, par le théorème des accroissements finis, on a

$$|\phi(x) - \phi(-x)| \leq 2x\|\phi'\|_{L^\infty}.$$

Par conséquent, la fonction $x \mapsto \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}$ est intégrable en 0 et on peut passer à la limite $\varepsilon \to 0$ pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \ln(x)(\phi'(x) + \phi'(-x))dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}dx.$$

Ainsi, la dérivée de $x \mapsto \ln(|x|)$ au sens des distributions est donnée par la distribution

$$(T_{\ln})' : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}dx.$$

Cette distribution porte le nom de *valeur principale de* $1/x$ et est étudiée à l'Exercice 1.6.

Exercice 1.6 (Valeur principale)**.** On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. Effectuer les rappels suivants.
   (a) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Solution: Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   (b) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.

   Solution: On définit T_f pour chaque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \phi dx.$$

2. Pourquoi la fonction $x \mapsto 1/x$ ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

Solution: La fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ car elle n'est pas intégrable en 0. Donc elle ne définit pas une distribution sur $\mathbb{R}$.

3. On définit la distribution $\text{vp}(1/x)$, dite *valeur principale* de $1/x$, pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx.$$

   (a) Montrer que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ définit bien une distribution.

   Solution: Il est clair que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est linéaire (si tant est qu'elle soit bien définie). Montrons que $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue (et bien définie). Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a

$$|\phi(x) - \phi(-x)| \leq 2x \sup_{y \in [-x,x]} |\phi'(y)|.$$

   D'autre part, puisque ϕ est à support compact, il existe $M_\phi > 0$ tel que $\phi(x) - \phi(-x) = 0$ pour tout $x > M_\phi$. Par conséquent,

$$\left| \left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \right| dx \leq 2M_\phi \|\phi'\|_{L^\infty}.$$

   Par définition, si une suite $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge vers 0, alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\text{supp}(\phi_n) \subset [-M, M]$ et $\|\phi_n'\|_{L^\infty} \to 0$ as $n \to \infty$. Donc $\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue.

   (b) Calculer le produit (au sens des distribution) $x\,\text{vp}(1/x)$.

   Solution: La fonction $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$, donc le produit $x\,\text{vp}(1/x)$ a un sens. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}\left\langle x\,\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle = \left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\phi \right\rangle &= \int_0^{+\infty} \frac{x\phi(x) - (-x)\phi(-x)}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(x) dx + \int_0^{+\infty} \phi(-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = \langle 1, \phi \rangle.\end{aligned}$$

   On remarque que $x\,\text{vp}(1/x) = 1$ au sens des distributions.

Exercice 1.7. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des points distincts de $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $(\theta_j)_{1\leq j\leq n} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\theta_j(x_k) = \delta_{jk}$ (δ_{jk} désignant ici le symbole de Kronecker).

Solution: Pour construire les θ_j, on commence par choisir une fonction de base $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu sur $[-1,1]$ (on pourra par exemple prendre la fonction ϕ définie à l'Exercice 1.1). Soit m la distance minimale entre les (x_j), i.e.

$$m = \min\{|x_j - x_k| : j,k = 1,\dots,n,\ j \neq k\}.$$

On définit une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\theta(x) = \frac{1}{\phi(0)}\phi\left(\frac{2}{m}x\right).$$

Alors $\theta(0) = 1$ et le support de θ est contenu dans $\left[-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right]$. On définit les fonctions $(\theta_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\theta_j(x) = \theta(x - x_j).$$

Soit $j,k \in \{1,\dots,n\}$. Alors

$$\theta_j(x_k) = \theta(x_k - x_j) = \delta_{jk},$$

car $x_j - x_k = 0$ si $j = k$ ou $|x_j - x_k| \geq m$ si $j \neq k$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution qui vérifie $\langle T, \phi\rangle = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui s'annule aux points $x_1,\dots,x_n$. Montrer qu'il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $T = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{x_j}$.

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On connaît la valeur de T pour une fonction test qui s'annule en $x_1,\dots,x_n$, l'idée est donc de construire à partir de ϕ une fonction s'annulant en $x_1,\dots,x_n$. Pour cela, on s'appuie sur les fonctions (θ_j) construites précédement. On définit $\tilde{\phi}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \sum_{j=1}^n \phi(x_j)\theta_j(x).$$

Par construction, $\tilde{\phi}(x_j) = 0$ pour tout $j = 1,\dots,n$ et donc $\langle T, \tilde{\phi}\rangle = 0$. Par ailleurs, on a

$$0 = \langle T, \tilde{\phi}\rangle = \langle T, \phi - \sum_{j=1}^n \phi(x_j)\theta_j\rangle = \langle T, \phi\rangle - \sum_{j=1}^n \langle T, \theta_j\rangle\phi(x_j).$$

Par conséquent, en posant $\alpha_j = \langle T, \theta_j\rangle$ pour $j = 1,\dots,n$, on a

$$\langle T, \phi\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(x_j),$$

en d'autres termes, on a

$$T = \sum_{j=1}^n \alpha_j \delta_{x_j}.$$

Remarquons que les coefficients (α_j) sont indépendants des fonctions θ_j choisies. En effet, considérons un autre ensemble de fonctions $(\tilde{\theta}_j)$ ayant les mêmes propriétés. Alors pour tout $j = 1,\dots,n$ on a

$$\langle T, \tilde{\theta}_j\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \tilde{\theta}_j(x_k) = \alpha_j.$$

Exercice 1.8. Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \phi(\sin(x)) dx.$$

1. Montrer que T est une distribution.

> **Solution:** Il est clair que T est bien définie et linéaire. Montrons que T est continue en 0 (et donc partout puisque T est linéaire). Soit $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle $\phi_n \to 0$. Lorsque $n \to +\infty$, on a
>
> $$|\langle T, \phi_n \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |\phi_n(\sin(x))| dx \leq \sqrt{\pi} \|\phi_n\|_{L^\infty} \to 0,$$
>
> donc T est bien continue en 0.

2. Déterminer le support de T.

> **Solution:** Puisque l'image de la fonction sin est $[-1, 1]$, seules les valeurs de ϕ sur $[-1, 1]$ comptent pour T. Montrons que $\text{supp}(T) \subset [-1, 1]$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $[-1, 1] \cap \text{supp}(\phi) = \emptyset$. Alors
>
> $$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \phi(\sin(x)) dx = 0.$$
>
> Réciproquement, montrons que $[-1, 1] \subset \text{supp}(T)$. Soit $x_0 \in]-1, 1[$ et $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\phi) \subset]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ et $\langle T, \phi \rangle \neq 0$. En utilisant la fonction ϕ définie à l'Exercice 1.1 et en posant
>
> $$\phi_{x_0,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\phi(0)} \phi \left(\frac{2(x - x_0)}{\varepsilon} \right),$$
>
> on obtient une fonction $\phi_{x_0,\varepsilon} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée sur $]x_0 - \varepsilon/2, x_0 + \varepsilon/2[$ et telle que $\phi(0) = 1$, $\phi_{x_0,\varepsilon} \geq 0$. Par continuité de $\phi_{x_0,\varepsilon}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi_{x_0,\varepsilon}(x) \geq 1/2$ sur $I =]x_0 - \varepsilon/n, x_0 + \varepsilon/n[$. On a donc
>
> $$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \phi(\sin(x)) dx \geq \frac{1}{2} \int_{\arcsin(I)} e^{-x^2} > 0.$$
>
> En conclusion, $\text{supp}(T) = [-1, 1]$.

Exercice 1.9. Trouver une fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle en 0 et une distribution T dont le support est réduit à $\{0\}$ et telle que $\langle T, \phi \rangle$ est non nul.

> **Solution:** On peut choisir par exemple la distribution δ' (dérivée de la distribution de Dirac) et une fonction ϕ de la forme $\phi : x \mapsto x\psi(x)$, où ψ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(0) \neq 0$. Pour tout $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $0 \notin \text{supp}(\chi)$, il existe un voisinage I de 0 tel que $\chi \equiv 0$ sur I et donc
>
> $$\langle \delta', \chi \rangle = -\chi'(0) = 0.$$
>
> D'autre part, on a
>
> $$\langle \delta', \phi \rangle = \langle \delta', x\phi \rangle = -\langle \delta, x\psi' + \psi \rangle = -\psi(0) \neq 0.$$

Exercice 1.10. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $E(x) = \frac{1}{2}|x|$.

1. Calculer E'' au sens des distributions.

Solution: Commencons par calculer la dérivée de E au sens des distributions. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}\langle T_E', \phi\rangle = -\langle T_E, \phi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x|\phi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{2}\phi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{2}\phi'(x)dx \\ = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \phi(x) + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)dx = \langle T_H, \phi\rangle,\end{aligned}$$

où H est la fonction de type Heaviside définie par $H(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)$ (de fait on a $H(x) = E'(x)$ pour tout $x \neq 0$). La fonction H étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'après la formule des sauts on a (au sens des distributions)

$$(T_H)' = (H(0^+) - H(0^-))\delta_0 = \delta_0.$$

Par conséquent, au sens des distributions, on a

$$(T_E)'' = \delta_0.$$

2. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(f)$ est compact et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u = E * f$. Montrer que u est bien définie et que $u'' = f$ au sens des distributions.
   On dit que E est la *solution fondamentale* du laplacien en dimension 1.

Solution: Le produit de convolution $u = E * f$ est bien défini car $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et f est à support compact et bornée. Calculons u'' au sens des distributions. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\langle (T_u)'', \phi\rangle = \langle T_u, \phi''\rangle = \int_{\mathbb{R}} E * f(x)\phi''(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x-y|f(y)dy\phi''(x)dx \\ = \int_{\mathbb{R}} f(y)\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x-y|\phi''(x)dxdy.\end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x-y|\phi''(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x|\phi''(x+y)dx = \langle T_E, \phi''(\cdot + y)\rangle = \langle (T_E)'', \phi(\cdot + y)\rangle = \phi(y).$$

Par conséquent,

$$\langle (T_u)'', \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(y)dy = \langle T_f, \phi\rangle.$$

En d'autres termes, on a bien

$$u'' = f$$

au sens des distributions.

2 Espaces de Sobolev en dimension un

Exercice 2.1. On se place sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ appartient à $H^1(I)$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'appartient pas à $H^1(I)$.

Exercice 2.2. On considère la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}\ln(2+x^2)}.$$

Montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Solution: La fonction u est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, la dérivée de u au sens des distributions coincide avec u' au sens classique. Pour montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$ il suffit donc de vérifier que u et u' sont dans $L^2(\mathbb{R})$. À la limite $|x| \to +\infty$, on a l'équivalence suivante

$$u^2(x) \sim \frac{1}{4|x| \ln(|x|)^2}.$$

D'après les règles d'intégration de Bertrand, la fonction u est donc dans $L^2(\mathbb{R})$. La dérivée de u se calcule à l'aide des formules usuelles et est donnée par

$$u'(x) = -\frac{x}{2\left(x^2+1\right)^{5/4} \ln\left(x^2+2\right)} - \frac{2x}{\sqrt[4]{x^2+1}\left(\ln\left(x^2+2\right)\right)^2\left(x^2+2\right)}.$$

À la limite $|x| \to +\infty$, on a l'équivalence suivante

$$(u'(x))^2 \sim \frac{\left(-\ln\left(|x|\right)-2\right)^2}{16\left(\ln\left(|x|\right)\right)^4 |x|^3}.$$

D'après les règles d'intégration de Bertrand, la dérivée u' est donc dans $L^2(\mathbb{R})$. En conclusion, on a bien montré que $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Exercice 2.3. Soit $I =]-1,1[$. On considère la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de h au sens des distributions.

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$. On a par définition de la dérivée au sens des distributions

$$\langle h', \phi \rangle = -\langle h, \phi' \rangle.$$

De plus, en utilisant l'expression de h et le fait que ϕ est à support compact dans $]-1,1[$, on obtient

$$-\langle h, \phi' \rangle = -\int_{-1}^{1} h(x)\phi'(x)dx = -\int_{0}^{1} \phi'(x)dx = \phi(0).$$

Par conséquent, au sens des distributions, on a

$$h' = \delta_0.$$

2. A-t-on $h \in L^2(I)$? $h \in H^1(I)$?

Solution: La fonction h est continue par morceau sur I, elle appartient donc à $L^2(I)$. En revanche, $h' = \delta_0$ ne peut pas être représenté par une fonction de $L^2(I)$, donc $h \notin H^1(I)$.

Exercice 2.4. Le but de cet exercice est d'étudier la limite à l'infini des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et de $H^1(\mathbb{R})$.

1. Construire une fonction u *continue et bornée* telle que $u \in L^2(\mathbb{R})$ et u n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$ on a

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0.$$

Solution: Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il $A > 0$ tel que si $|x| > A$, alors $|u(x)| < \varepsilon$. Par densité des fonctions test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R})$. Puisque l'injection de $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ est continue, on a également $u_n \to u$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Choisissons alors n assez grand, de telle manière que $\|u_n - u\|_{L^\infty} < \varepsilon$. Puisque u_n est à support compact, il existe $A > 0$ tel que $u_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > A$. On a donc $|u(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > A$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 2.5 (Troncature des fonctions de $H^1(\mathbb{R})$)**.** On veut montrer que pour tout $u, v \in H^1(\mathbb{R})$ les fonctions $\max(u, v)$ et $\min(u, v)$ appartiennent encore à $H^1(\mathbb{R})$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$f(s) = \begin{cases} (s^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon & \text{si } s > 0, \\ 0 & \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$
Montrer que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a $f(u) \in L^2(\mathbb{R})$ et $u'f'(u) \in L^2(\mathbb{R})$.

Solution: Commencons par observer que la fonction f est manifestement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et continue en 0. Sur $]0, +\infty[$, on a
$$f'(s) = s(s^2 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$
donc
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(s) = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \leq 0}} f'(s)$$
et f' est donc bien définie et continue en 0. De plus, on a $f(0) = 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a
$$f(s) \leq |s|, \quad f'(s) \leq 1.$$
Soit $u \in H^1(\mathbb{R})$. Puisque $f(s) \leq s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'estimation
$$|f(u(x))| \leq |u(x)|,$$
ce qui implique que $f(u) \in L^2(\mathbb{R})$ puisque $u \in L^2(\mathbb{R})$.
Formellement, on s'attend à ce que la fonction $u'f'(u)$ soit la dérivée de $f(u)$ au sens des distributions. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a $|f'(s)| \leq 1$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$|u'f'(u)| \leq |u'|$$
et donc $u'f(u) \in L^2(\mathbb{R})$ puisque $u' \in L^2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a
$$-\int_{\mathbb{R}} f(u)\phi' dx = \int_{\{u>0\}} \phi u u'(u^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Solution: Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\mathbb{R})$ lorsque $n \to +\infty$. Puisque les fonctions (u_n) sont régulières, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a bien
$$-\int_{\mathbb{R}} f(u_n)\phi' dx = \int_{\{u_n>0\}} \phi u_n u_n'(u_n^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$
Passons à la limite lorsque $n \to +\infty$. Puisque u_n et u_n' convergent vers u et u' dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe une sous-suite, toujours notée u_n, telle que u_n et u_n' converge vers u et u' presque partout et sont dominées par des fonctions $U, V \in L^2(\mathbb{R})$. Rappelons que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a
$$f(s) \leq |s|, \quad f'(s) \leq 1,$$

donc
$$|f(u_n)\phi| \leq U\phi, \quad |\phi u_n u_n'(u_n^2+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}| \leq \phi V,$$
et par le théorème de convergence dominée on a les convergences
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f(u_n)\phi' dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)\phi' dx,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\{u_n>0\}} \phi u_n u_n'(u_n^2+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_{\{u>0\}} \phi u u'(u^2+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$
ce qui nous conduit à la conclusion souhaitée.

3. On pose $u^+ = \max(u,0)$. Déduire de 2. que
$$-\int_{\mathbb{R}} u^+\phi' = \int_{\{u>0\}} \phi u' dx,$$

Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $u \in H^1(\mathbb{R})$. Remarquons que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(s) = \max(s,0), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} f'(s) = \chi_{]0,+\infty[},$$
donc pour obtenir l'égalité souhaitée il suffit de passer à la limite dans l'égalité obtenue en 2. On applique le théorème de convergence dominée après avoir observé que pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$|f(u)\phi'| \leq u\phi, \quad |\phi u u'(u^2+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}| \leq \phi u',$$
ce qui donne la conclusion demandée.

4. Montrer que $u^+ \in H^1(\mathbb{R})$ et déterminer $(u^+)'$.

Solution: Il est clair que $u^+ \in L^2(\mathbb{R})$. D'après la réponse précédente, la dérivée de u^+ au sens des distributions est donnée par
$$(u^+)' = u'\chi_{u>0},$$
et on a bien $(u^+)' \in L^2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que pour tout $u, v \in H^1(\mathbb{R})$ on a $\max(u,v), \min(u,v), |u| \in H^1(\mathbb{R})$.

Solution: Il suffit de remarquer que pour toutes fonctions u et v on a
$$\min(u,v) = v-(v-u)_+, \quad \max(u,v) = v+(u-v)_+, \quad |u| = u_+ + (-u)_+$$
et donc si $u, v \in H^1(\mathbb{R})$ on a $\max(u,v), \min(u,v), |u| \in H^1(\mathbb{R})$ par les réponses précédentes.

Exercice 2.6 (Espace H^2)**.** Définissons l'espace $H^2(0,1)$ par
$$H^2(0,1) = \{u \in H^1(0,1) | u' \in H^1(0,1)\}.$$

1. Montrer que $H^2(0,1)$ muni du produit scalaire
$$(u,v)_{H^2} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2} + (u'',v'')_{L^2}$$
est un espace de Hilbert séparable.

Solution: La séparabilité de $H^2(0,1)$ est une propriété héritée de l'espace $L^2(\mathbb{R})$. En effet, l'espace $L^2(\mathbb{R})$ est séparable, donc l'espace produit $(L^2(\mathbb{R}))^3$ est lui-même séparable. Définissons l'injection

$$\begin{aligned} H^2(0,1) &\to (L^2(\mathbb{R}))^3, \\ u &\mapsto (u, u', u''). \end{aligned}$$

Cette injection est continue, donc $H^2(0,1)$ peut être représenté comme un sous-espace de $(L^2(\mathbb{R}))^3$ et donc est séparable.

2. Montrer que si $u \in L^2(0,1)$ et si $u'' \in L^2(0,1)$, alors $u \in H^2(0,1)$.

Solution: Puisqu'on a déjà $u, u'' \in L^2(0,1)$, pour montrer que $u \in H^2(0,1)$ il suffit de montrer que $u' \in L^2(0,1)$.
Définissons une fonction $v \in \mathcal{C}([0,1]) \subset L^2(0,1)$ par

$$v(x) := \int_0^x u''(y)dy.$$

Montrons que $v' = u''$ au sens des distributions. Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Alors par le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \langle T_v', \phi \rangle = -\int_0^1 v(x)\phi'(x)dx = -\int_0^1 \int_0^x u''(y)\phi'(x)dydx \\ = -\int_0^1 u''(y) \int_0^1 \chi_{[0,x]}(y)\phi'(x)dxdy. \end{aligned}$$

On a $\chi_{[0,x]}(y) = \chi_{[y,0]}(x)$. Donc l'intégrale par rapport à x devient

$$\int_0^1 \chi_{[0,x]}(y)\phi'(x)dx = \int_0^1 \chi_{[y,1]}(x)\phi'(x)dx = \int_y^1 \phi'(x)dx = -\phi(y).$$

Ainsi, on a

$$\langle T_v', \phi \rangle = \int_0^1 u''(y)\phi(y)dy = \langle T_u'', \phi \rangle.$$

Par construction, la fonction v est dérivable presque partout et $v' = u''$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $(T_u)' = T_v + T_C$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$, donc u' peut être représenté par une fonction de $L^2(0,1)$, donnée par $u' = v + C$. Le résultat est même plus précis, puisque $v \in \mathcal{C}([0,1])$, on a également $u' \in \mathcal{C}([0,1])$ et donc $u'(x) = u'(0) + v(x)$.

3. Montrer que l'application

$$u \mapsto \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H^2(0,1)$, équivalente à la norme usuelle (engendrée par le produit scalaire défini en 1.).

Solution: Soit $u \in H^2(0,1)$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^x u''(y)dy + u'(0) \right|^2 dx \le 2\int_0^1 \int_0^x \left|u''(y)\right|^2 dydx + 2\left|u'(0)\right|^2 \\ \le 2\|u''\|_{L^2}^2 + 2\left|u'(0)\right|^2 \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $|u'(0)|$ peut être contrôlé par $\|u\|_{L^2} + \|u''\|_{L^2}$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $\int_0^1 \phi(x)dx = 1$. Posons

$$v(x) = \int_0^x u''(y)dy.$$

On a

$$u'(0) = \int_0^1 u'(0)\phi(x)dx = \int_0^1 (u'(x) - v(x))\phi(x)dx = \int_0^1 u(x)\phi'(x) + \int_0^1 v(x)\phi(x)dx$$

donc

$$|u'(0)| \leq \|u\|_{L^2}\|\phi'\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}\|\phi'\|_{L^2} + \|u''\|_{L^2}.$$

4. Montrer que $H^2(0,1)$ s'injecte de manière compacte dans $\mathcal{C}^1([0,1])$.

Solution: La continuité de l'injection de $H^2(0,1)$ dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ est une conséquence directe de l'inégalité pour tout $u \in \mathcal{H}^2(0,1)$ donnée par

$$\|u\|_{H^2}^2 \leq \|u\|_{H^1}^2 + \|u'\|_{H^1}^2 \leq C(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|u'\|_{L^\infty}^2).$$

La compacité de l'injection s'obtient de façon similaire. En effet, considérons une suite $(u_n) \subset H^2(0,1)$ telle que (u_n) est bornée dans $H^2(0,1)$. Alors par compacité de l'injection de $H^1(0,1)$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, la suite (u_n) admet une sous-suite convergente (u_{n_k}) dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ et la suite (u'_{n_k}) admet une sous-suite convergente $(u'_{n_{k_j}})$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. La sous-suite $(u_{n_{k_j}})$ converge donc dans $\mathcal{C}^1([0,1])$.

Exercice 2.7 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)**.** Soit I un intervalle borné. Pour tout $u \in H^1(I)$, on définit la moyenne $\bar{u}$ de u par

$$\bar{u} = \frac{1}{|I|}\int_I u(x)dx.$$

Le but de cet exercice est de montrer (inégalité de Poincaré-Wirtinger) qu'il existe une constante $C = C(|I|)$ telle que

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, périodique de période 2π et de moyenne nulle, i.e. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. Montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \qquad (1)$$

Solution: Puisque f est régulière et périodique, on peut décomposer f en série de Fourier : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)e^{-ik\xi}d\xi.$$

Puisque f est régulière, f' peut également être décomposée en une série de Fourier dont les coefficients sont (ikc_k), c'est à dire

$$f'(x) = i\sum_{k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{ikx}.$$

D'après l'égalité de Parseval,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2.$$

On voit donc que si $c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, c'est à dire si f est de moyenne nulle, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Notons que si $c_0 \neq 0$, alors l'inégalité ci-dessus n'est plus nécessairement vrai. Par exemple, la fonction constante $f \equiv 1$ est bien régulière et périodique, mais elle ne vérifie évidemment pas l'inégalité.

2. Montrer qu'on a égalité dans (1) si et seulement si il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

Solution: En reprenant l'analyse de 1. on observe que pour tout $k \neq 0$ on a

$$|c_k|^2 \leq k^2 |c_k|^2,$$

avec égalité si et seulement $k = \pm 1$ ou $c_k = 0$. Ainsi, on a égalité en (1) si et seulement f est de la forme $f(x) = c_{-1}e^{-ix} + c_1 e^{ix}$. Dans ce cas, comme par ailleurs f est à valeurs réelles, il existe $a = 2\Re(c_{-1})$ et $b = 2\Im(c_{-1})$ tels que

$$f(x) = a\cos(x) + b\sin(x).$$

3. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction régulière de moyenne nulle, i.e. $\int_0^\pi f(x)dx = 0$. Montrer que

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \leq \int_0^\pi |f'(x)|^2 dx.$$

Exhiber ensuite un contre-exemple à l'inégalité précédente si f n'est pas de moyenne nulle.

Solution: On souhaite s'appuyer sur les résultats obtenus en 1. pour traiter cette question. Pour cela, on étend la fonction f à une fonction périodique de période 2π et régulière sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on définit tout d'abord f sur $[-\pi, 0]$ en posant pour tout $x \in [-\pi, 0]$

$$f(x) = f(-x).$$

On obtient ainsi une fonction défini sur $[-\pi, \pi]$ telle que $f(-\pi) = f(\pi)$. On prolonge alors f par périodicité à $\mathbb{R}$ en posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x + 2k\pi) = f(x).$$

La régularité de f est préservée sur $\mathbb{R}$, sauf aux points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En ces points, f est continue et dérivable à gauche et à droite, ce qui est suffisant pour que l'analyse faite en 1. s'applique. On a donc

$$\int_{-\pi}^\pi |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^\pi |f'(x)|^2 dx.$$

En utilisant la parité de f, on obtient

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi |f'(x)|^2 dx = \int_0^\pi |f'(x)|^2 dx,$$

ce qui termine la preuve.
L'exemple le plus simple d'une fonction qui n'est pas de moyenne nulle est sans doute la fonction v constante égale à 1 partout, i.e.

$$\begin{aligned} v : & I \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto 1. \end{aligned}$$

Cette fonction est bien dans régulière mais ne vérifie bien entendu pas l'inégalité (puisque $v' \equiv 0$).

4. En déduire l'inégalité de Poincaré-Wirtinger.

Solution: Soit $I =]a, b[$ et $u \in H^1(a, b)$. On pose $v = u - \bar{u}$. Alors $v \in H^1(a, b)$ et v est de moyenne nulle. On se ramène à l'intervalle $[0, \pi]$ en définissant w par

$$v(x) = w\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right).$$

Alors $w \in H^1(0,\pi)$. Il existe une suite $w_n \in \mathcal{D}([a,b])$ telle que $w_n \to w$ dans $H^1(0,\pi)$. Cela implique notament que $\bar{w}_n \to \bar{w} = 0$. Quite à remplacer w_n par $w_n - \bar{w}_n$, on peut supposer que w_n est de moyenne nulle pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Puisque w_n est régulière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par les réponses précédentes que

$$\|w_n\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|w_n'\|_{L^2(0,\pi)}.$$

Ainsi donc, puisque $w_n \to w$ dans $H^1(0,\pi)$, on a

$$\|w\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|w'\|_{L^2(0,\pi)}.$$

Après retour à v et changement de variable dans les normes, on obtient

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{b-a}{\pi}\|v'\|_{L^2(a,b)}.$$

Puisque $v = u - \bar{u}$ et $v' = u'$, on a

$$\|u-\bar{u}\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{b-a}{\pi}\|u'\|_{L^2(a,b)},$$

ce qui est bien l'inégalité souhaitée. On peut remarquer que la constante $C = \frac{b-a}{\pi}$ est optimale (c'est une conséquence directe de la réponse à la question 2).

Exercice 2.8 (Inégalité de Hardy)**.** Le but de cette exercice est d'établir l'inégalité de Hardy

$$\int_0^1 \left|\frac{u(x)}{x}\right|^2 dx \leq 4\int_0^1 |u'(x)|^2 dx,$$

pour toute fonction $u \in H^1(0,1)$ telle que $u(0) = 0$.

1. Montrer que si $u(0) \neq 0$, alors $x \mapsto \frac{u(x)}{x}$ n'est pas dans $L^2(0,1)$.
2. Soit $u \in H^1(0,1)$ telle que $u(0) = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1])$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(0,1)$ lorsque $n \to +\infty$ (où $\mathcal{D}(]0,1])$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]0,1]$).
3. Soit v in $\mathcal{D}(]0,1])$. Montrer que

$$\int_0^1 \left|\frac{u(x)}{x}\right|^2 dx \leq 2\int_0^1 |u'(x)|^2 dx,$$

Solution: Par intégration par partie et puisque v est à support compact sur $]0,1]$, on a

$$\int_0^1 \left|\frac{v(x)}{x}\right|^2 dx = \left[-v^2(x)\frac{1}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 2v'(x)v(x)\frac{1}{x}dx = -v^2(1) + \int_0^1 2v'(x)v(x)\frac{1}{x}dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient donc

$$\int_0^1 \left|\frac{v(x)}{x}\right|^2 dx \leq 2\left(\int_0^1 (v'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left|\frac{v(x)}{x}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui donne après simplification et élevation au carré

$$\int_0^1 \left|\frac{v(x)}{x}\right|^2 dx \leq 4\int_0^1 (v'(x))^2 dx.$$

4. En déduire l'inégalité pour toute fonction $u \in H^1(0,1)$ telle que $u(0) = 0$.

Solution: Soit $u \in H^1(0,1)$ telle que $u(0) = 0$. Il existe une suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1])$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(0,1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^1 \left|\frac{u_n(x)}{x}\right|^2 dx \leq 4 \int_0^1 (u_n'(x))^2 dx.$$

Le passage à la limite dans le membre de droite ne pose pas de problème. Pour le membre de gauche, on remarque que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $(u_n - u_m) \in \mathcal{D}(]0,1])$ et donc

$$\int_0^1 \left|\frac{u_n(x) - u_m(x)}{x}\right|^2 dx \leq 4 \int_0^1 (u_n'(x) - u_m'(x))^2 dx.$$

La suite (u_n') étant de Cauchy dans $L^2(0,1)$, on en déduit que la suite (u_n/x) est également de Cauchy dans $L^2(0,1)$ et converge donc vers une limite qui ne peut être que u/x. Cela prouve que u/x est dans $L^2(0,1)$ et qu'on a l'inégalité de Hardy

$$\int_0^1 \left|\frac{u(x)}{x}\right|^2 dx \leq 4 \int_0^1 (u'(x))^2 dx.$$

Solution: Remarquons qu'il existe de nombreuses autres preuves possibles de l'inégalité de Hardy. On peut par exemple définir l'opérateur

$$\begin{aligned} T : L^2(0,1) &\to L^2(0,1), \\ u &\mapsto \left(x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x u(s)ds\right). \end{aligned}$$

L'opérateur T est a priori partiellement défini sur l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$. Cependant, on peut calculer formellement son adjoint T^* en observant que pour $u, v \in L^2(0,1)$, on a

$$\begin{aligned} (u, Tv)_{L^2} &= \int_0^1 u(x)\frac{1}{x}\int_0^x v(s)dsdx = \int_0^1\int_0^1 \chi_{[0,x]}(s)\frac{1}{x}u(x)v(s)dsdx \\ &= \int_0^1\int_0^1 \chi_{[s,1]}(x)\frac{1}{x}u(x)v(s)dxds = \int_0^1\left(\int_s^1 \frac{1}{x}u(x)dx\right)v(s)ds = (T^*u, v) \end{aligned}$$

où on a définit T^*u par

$$T^*u(s) = \int_s^1 \frac{u(x)}{x}dx.$$

L'opérateur T^* est bien défini sur $L^2(0,1)$ tout entier. Soit $u \in L^2(0,1)$. Définissons une fonction U par

$$U(s) = \int_s^1 \frac{u(x)}{x}dx.$$

On a $U^2(s) = -2\int_s^1 U'(x)U(x)dx$ (car $U(1) = 0$) et par ailleurs $U'(x) = \frac{u(x)}{x}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|T^*u\|_{L^2}^2 = \|U\|_{L^2}^2 &= -2\int_0^1\int_s^1 U'(x)U(x)dxds = -2\int_0^1 U'(x)U(x)\int_0^x dsdx \\ &= -2\int_0^1 u(x)U(x)dx \leq 2\|u\|_{L^2}\|U\|_{L^2} = 2\|u\|_{L^2}\|T^*u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Cela donne après simplication

$$\|T^*u\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{L^2},$$

et donc la norme d'opérateur de T^* vérifie $\|T^*\| \leq 2$. On peut en fait vérifier que $\|T^*\| = 2$. L'opérateur T étant l'adjoint de T^*, il est également défini sur $L^2(0,1)$ tout entier et continu, avec $\|T\| = \|T^*\| \leq 2$, ce qui donne l'inégalité de Hardy.

3 Problèmes aux limites en dimension un

Exercice 3.1 (Problème de Helmholtz avec condition de Neumann homogène)**.** Soit $f \in L^2(0,1)$. On souhaite résoudre sur $I =]0,1[$ le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et si $u \in \mathcal{C}^2$ est une solution classique de (2) alors pour tout $v \in H^1(0,1)$ on a
$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fvdx.$$
2. Pour $u, v \in H^1(0,1)$, on définit
$$a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)dx, \quad L(v) = \int_0^1 fvdx.$$
Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que pour tout $v \in H^1(0,1)$ on a
$$a(u,v) = L(v).$$
3. Montrer que $u'' = u - f$ au sens des distributions et en déduire que $u \in H^2(0,1)$.
4. Peut-on définir $u'(0)$ et $u'(1)$? Si oui, déterminer leur valeur.
5. Conclure.

Exercice 3.2 (Problème de Helmholtz avec condition de Neumann non-homogène)**.** Soit $f \in L^2(0,1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre sur $I =]0,1[$ le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta. \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}([0,1])$ et si $u \in \mathcal{C}^2$ est une solution classique de (2) alors pour tout $v \in H^1(0,1)$ on a
$$\int_0^1 (u'v' + uv)dx = \int_0^1 fvdx - \alpha v(0) + \beta v(1).$$
2. En déduire une forme bilinéaire a et une forme linéaire L adaptées au problème (3).
3. Reprendre la démarche de l'Exercice 3.1 pour résoudre le problème (3).

Exercice 3.3 (Problème de Helmholtz avec condition aux limites périodiques)**.** Soit $f \in L^2(0,1)$. On souhaite résoudre sur $I =]0,1[$ le problème

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{4}$$

1. Donner une formulation faible de (4).
2. En déduire un espace fonctionnel adapté à la prise en compte des conditions aux limites périodiques.
3. Résoudre le problème (4).

Exercice 3.4 (Problème de Poisson avec condition de Neumann)**.** Soit $I =]0,1[$ et $f \in L^2(I)$ à moyenne nulle, i.e. $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

1. Pour $u, v \in H^1(0,1)$ on définit

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \left(\int_0^1 u(x)dx\right)\left(\int_0^1 v(x)dx\right), \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

   (i) Montrer qu'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram (indication : faire intervenir l'inégalité de Poincaré-Wirtinger).

   (ii) Montrer que la solution obtenue par le théorème de Lax-Milgram vérifie le problème de Poisson avec condition de Neumann

$$\begin{cases} -u'' = f, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ \int_0^1 u(x)dx = 0. \end{cases}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose désormais

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx + \alpha(v(0) - v(1)).$$

   Montrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique de nouveau et identifier le problème satisfait par la formulation variationnelle associée.

Exercice 3.5 (Problème de Helmholtz avec condition aux limites de Fourier-Robin)**.** Soit $I =]0,1[$, $f \in L^2(I)$ et $\lambda > 0$. Pour $u, v \in H^1(0,1)$ on définit

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx + \lambda u(0)v(0) + \lambda u(1)v(1), \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Montrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique et identifier le problème satisfait par la formulation variationnelle associée.

Exercice 3.6 (Problème de convection-diffusion)**.** On se place sur l'intervalle $]0,1[$. Soit $f \in L^2(0,1)$ et $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -u'' + \gamma u' = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. Determiner la formulation variationnelle associée à (5).
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $v \in H_0^1(0,1)$ on a

$$\int_0^1 vv'dx = 0.$$

3. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible u à (5).
4. Montrer que la solution faible u est telle que $u'' \in L^2(0,1)$.
5. Montrer que la solution faible u ne minimise pas dans $H_0^1(0,1)$ la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\nabla u|^2 + \gamma uu'\right)dx - \int_0^1 fudx.$$

Exercice 3.7 (Problèmes aux limites d'ordre 4)**.** *On admettera dans cet exercice les résultats de l'Exercice 2.6.* Soit $I =]0,1[$, $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

1. On considère le problème

$$\begin{cases} u^{(4)} + u = f, \\ u''(0) = u'''(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

   1. Déterminer une formulation faible de (6) (on fera intervenir l'espace $H^4(0,1)$).

2. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in H^4(0,1)$ à la formulation faible de (6).
3. Montrer que u vérifie (6) au sens classique.

4. On considère maintenant le problème

$$\begin{cases} u^{(4)} + u = f, \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Montrer (7) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$.

Exercice 3.8. Pour $u \in L^2(0,1)$, on note u' la dérivée de u au sens des distributions. On considère l'espace W défini par

$$W = \{u \in L^2(0,1) : \sqrt{x}u' \in L^2(0,1)\}.$$

On munit W de la norme

$$\|u\|_W = \left(\int_0^1 \left(x|u'(x)|^2 + |u(x)|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On désigne par W_0 l'adhérence (pour la norme définie ci-dessus) de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans W. On définit aussi sur W la semi-norme

$$|u|_W = \left(\int_0^1 x|u'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Soit $T_n \subset \mathcal{D}'(]0,1[)$.
   (a) Rappeler la définition de la convergence d'une suite dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$.

   Solution: On dit qu'une suite $(T_n) \subset \mathcal{D}'(]0,1[)$ *converge* vers $T \in \mathcal{D}'(]0,1[)$ lorsque pour tout $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ la suite $\langle T_n, \phi\rangle$ converge vers $\langle T, \phi\rangle$.

   (b) On suppose que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$. Montrer que $(\sqrt{x}T_n')$ converge vers $\sqrt{x}T'$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$.

   Solution: Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Lorsque $n \to +\infty$, on a

   $$\langle \sqrt{x}T_n', \phi\rangle = -\langle T_n, (\sqrt{x}\phi)'\rangle \to -\langle T, (\sqrt{x}\phi)'\rangle = \langle \sqrt{x}T', \phi\rangle.$$

   Donc $(\sqrt{x}T_n')$ converge vers $\sqrt{x}T'$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$.

2. Montrer que W et W_0 sont des espaces de Hilbert.

Solution: L'application

$$\begin{aligned} &W \times W \to \mathbb{R} \\ &(u,v) \mapsto (u,v)_W = \int_0^1 \left(xu'(x)v'(x) + u(x)v(x)\right) dx, \end{aligned}$$

est clairement bilinéaire, symétrique, définie et positive. C'est donc un produit scalaire sur W, qui est de plus associé à la norme $\|\cdot\|_W$. Donc W est un espace préhilbertien. Soit $(u_n) \subset W$ une suite de Cauchy dans W. Par définition de la norme sur W, les suites (u_n) et $(\sqrt{x}u_n')$ sont également de Cauchy dans $L^2(0,1)$ et donc il existe $u, v \in L^2(0,1)$ telle que $u_n \to u$ et $\sqrt{x}u_n' \to v$ dans $L^2(0,1)$. De plus, on a vu qu'au sens des distributions, on a $\sqrt{x}u_n' \to \sqrt{x}u'$. Par unicité de la limite, on a $v = \sqrt{x}u' \in L^2(0,1)$ et donc $u_n \to u$ dans W. Donc W est complet et donc W est un espace de Hilbert.

3. En partant de la relation

$$v(x) = -\int_x^1 v'(y)dy,$$

montrer que pour tout $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ et pour tout $x \in]0,1]$ on a les inégalités suivantes

$$|v(x)| \leq |\ln(x)|^{\frac{1}{2}}|v|_W, \quad \|v\|_{L^2} \leq |v|_W.$$

Solution: Soit $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$ et $x \in]0,1]$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|v(x)| \leq \int_x^1 \frac{y}{y}|v'(y)|dy \leq \left(\int_x^1 \frac{1}{y}dy\right)^{\frac{1}{2}} |v|_W = |\ln(x)|^{\frac{1}{2}}|v|_W.$$

Par conséquent,

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |v(x)|^2 dx \leq |v|_W^2 \int_0^1 |\ln(x)|dx = |v|_W^2.$$

Les deux inégalités souhaitées sont donc démontrées.

4. En déduire que
   (a) $\|\cdot\|_W$ et $|\cdot|_W$ sont deux normes équivalentes sur W_0,

   Solution: Par définition, $\mathcal{D}(]0,1[)$ est dense dans W_0, donc les inégalités démontrées en 3. sont également vraies pour tout $v \in W_0$. Pour tout $v \in W_0$, on a

   $$|v|_W \leq \|v\|_W \leq 2|v|_W,$$

   ce qui prove l'équivalence des normes.

   (b) $1 \notin W_0$.

   Solution: On a $\|1\|_W = 1 \geq 0 = |1|_W$, donc $1 \notin W_0$.

5. On pose $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $g^\alpha \in W$?

Solution: Remarquons que $g(x) = -\ln(x)$. On a donc $g^\alpha \in L^2(0,1)$ quel que soit $\alpha > 0$. Par ailleurs,

$$(g^\alpha)'(x) = -\frac{\alpha}{x}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\alpha-1}.$$

Donc, d'après les règles de Bertrand, $\sqrt{x}(g^\alpha)' \in L^2(0,1)$ si $-2(\alpha-1) > 1$, i.e. $\alpha < \frac{1}{2}$.

6. On définit l'application $\Phi : v \mapsto g^{-\frac{1}{2}}v$.
   (i) Montrer que Φ est continue de W_0 muni de la norme $|\cdot|_W$ vers $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Solution: L'application Φ étant linéaire, il suffit de montrer la continuité en 0. Soit $v \in W_0$. D'après 3. pour tout $x \in]0,1]$ on a

$$|\Phi(v)(x)| = |g^{-\frac{1}{2}}(x)v(x)| \leq |v|_W.$$

En prenant le supremum du membre de gauche, cela prouve la continuité.

   (ii) En déduire que $W_0 \subset \mathcal{C}(]0,1])$ et que $W_0 \subset \{v \in W : v(1) = 0\}$.

Solution: D'après ce qui précède, pour tout $v \in W$, $g^{-\frac{1}{2}}v$ est continue et borné sur $[0,1]$. La fonction $g^{-\frac{1}{2}}$ étant elle-même continue et bornée sur $]0,1]$, cela implique que v est aussi continue sur $]0,1]$ (mais pas forcément bornée). D'autre part, puisque $g^{\frac{1}{2}}$ tend vers 0 en 1, on doit forcément avoir $v(1) = 0$.

7. Soit $f \in W$ donné. Montrer qu'il existe un unique $u \in W_0$ tel que pour tout $v \in W_0$ on a

$$\int_0^1 xu'(x)v'(x)dx = \int_0^1 xf'(x)v'(x)dx.$$

> **Solution:** Il s'agit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram à la forme bilinéaire a et la forme linéaire L dans l'espace H, donnés par
>
> $$a(u,v) = \int_0^1 xu'(x)v'(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 xf'(x)v'(x)dx, \quad H = W_0.$$
>
> La continuité de a et L s'obtiennent par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La coercivité de a est évidente. Le théorème de Lax-Milgram s'applique donc : il existe un unique $u \in W_0$ vérifiant la propriété souhaitée.

8. Déterminer les solutions $w \in W$ de l'équation différentielle

$$(xw')' = 0.$$

> **Solution:** En intégrant deux fois l'équation, on voit qu'il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que
>
> $$w(x) = C_1 \ln(x) + C_2.$$
>
> La fonction w est dans W si et seulement si $C_1 = 0$.

9. Déduire de 8 que la fonction u trouvé en 7 vérifie $u(x) = f(x) - f(1)$.

> **Solution:** Au sens des distributions, u vérifie
>
> $$(xu')' = (xf')',$$
>
> donc
>
> $$(x(u-f)')' = 0.$$
>
> Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ telle que
>
> $$u - f = C.$$
>
> Puisque $u \in W_0$, $u(1) = 0$, donc $C = f(1)$. On a donc
>
> $$u = f - f(1).$$

10. On désigne par $\mathbb{P}_0$ l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$. Montrer les relations suivantes :

$$W = W_0 \oplus \mathbb{P}_0, \quad W \subset \mathcal{C}(]0,1]), \quad W_0 = \{v \in W, v(1) = 0\}, \quad W_0 \notin \mathcal{C}([0,1]).$$

> **Solution:** D'après ce qui précède, pour toute fonction $f \in W$ il existe un unique $u \in W_0$ tel que $u = f - f(1)$. Cela prouve que $W = W_0 \oplus \mathbb{P}_0$ et que $W_0 = \{v \in W, v(1) = 0\}$. On a vu que $W_0 \subset \mathcal{C}(]0,1])$, donc on a également $W \subset \mathcal{C}(]0,1])$. Enfin la fonction g^α pour $\alpha < 1/2$ est dans W mais n'est pas continue en 0.

11. Montrer que W est l'adhérence de $\mathcal{D}([0,1])$ pour la norme $\|\cdot\|_W$.

> **Solution:** Etant donné $f \in W$, il existe $u \in W_0$ tel que $f = u + f(1)$. Puisque $\mathcal{D}(]0,1[)$ est dense dans W_0, il existe $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $u_n \to u$ dans W. Posons alors
>
> $$f_n = u_n + f(0)\chi,$$
>
> où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\chi(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors $(f_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f_n \to f$ dans W.

Exercice 3.9. Soit $I =]0,1[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit la subdivision de $[0,1]$

$$0 = x_0 < \cdots < x_i = \frac{i}{N} < \cdots < x_N = 1.$$

On note par V_N l'ensemble des fonctions $u \in H_0^1(0,1)$ telles que les restrictions $u_{|[x_i,x_{i+1}]}$ sont affines pour tout $i = 0,\dots,N-1$. Soit $H \subset H_0^1(0,1)$. On considère le problème suivant :

$$u \in H, \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx \text{ pour tout } v \in H. \tag{8}$$

1. On suppose que $H = H_0^1(0,1)$. Montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ vérifiant (8). Montrer que $u \in H^2(0,1)$.

> **Solution:** On veut appliquer le théorème de Lax-Milgram. Pour $u, v \in H$, on définit une forme bilinéaire a et une forme linéaire L par
>
> $$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 v(x)dx.$$
>
> On a
>
> $$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$
>
> donc a est continue. D'autre part, rappelons l'inégalité de Poincaré : il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(0,1)$ on a
>
> $$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}.$$
>
> Ainsi, on a
>
> $$a(u,u) = \|u'\|_{L^2}^2 \geq \tilde{C}\|u\|_{H^1}^2$$
>
> pour $\tilde{C} = \sqrt{\min(1/C,1)/2} > 0$. Donc a est coercive. Par ailleurs on a par
>
> $$L(v)| \leq \|v\|_{L^1} \leq \|v\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1}.$$
>
> Donc L est continue. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(0,1)$ tel que
>
> $$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 v(x)dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(0,1).$$
>
> Par ailleurs, en restreignant v à $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans l'égalité ci-dessus, on observe que u' est dérivable au sens des distributions, avec $-u'' = 1$. Donc $u'' \in L^2(0,1)$ et donc $u \in H^2(0,1)$.

2. Construire une base de V_N. En déduire la dimension de V_N.

> **Solution:** Pour déterminer la dimension de V_N, on en exhibe une base. Définissons $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
>
> $$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour $i = 1, \dots, N-1$, on définit w_i pour $x \in [0,1]$ par

$$w_i(x) = w\left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right).$$

Puisque tout $u \in V_N$ peut s'écrire

$$u = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i) w_i,$$

la famille (w_i) forme une base de V_N et V_N est donc de dimension finie $N-1$.

3. On suppose que $H = V_N$. Écrire le problème (8) sous forme matriciel.

Solution: En utilisant la base (w_i) de V_N obtenue à la réponse précédente, on décompose $u, v \in V_N$ en

$$u = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i) w_i, \quad v = \sum_{j=1}^{N-1} v(x_j) w_j.$$

Le problème (8) devient alors

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} u(x_i) a(w_i, w_j) v(x_j) = \sum_{j=1}^{N-1} L(w_j) v(x_j).$$

On peut écrire cette équation sous forme matricielle :

$$V^T A U = V^T \mathcal{L}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V(x_1) \\ \vdots \\ V(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} L(w_1) \\ \vdots \\ L(w_{N-1}) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a(w_1, w_1) & \dots & a(x_1, x_{N-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(w_{N-1}, w_1) & \dots & a(x_{N-1}, x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Comme l'équation doit être valide pour tout $V \in \mathbb{R}^{N-1}$, on doit avoir

$$AU = \mathcal{L}.$$

Précisons maintenant A et $\mathcal{L}$. Il n'est pas difficile de voir que

$$A = N \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & (0) \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ (0) & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que A est une matrice tri-diagonale, égale à un facteur $1/N$ près à la matrice de la dérivée seconde discrète. On pourrait appliquer le théorème de Lax-Milgram pour en déduire l'existence d'une unique solution u_N au problème (8) lorsque $H = V_N$. Mais plus simplement, on peut aussi remarquer que A est symétrique et pour tout $U \in \mathbb{R}^{N-1}$ on a (en posant $u(x_0) = u(x_{N+1}) = 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \cdot U^T A U &= \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j)(2u(x_j) - (u(x_{j-1}) + u(x_{j+1})) \\
&= 2\sum_{j=1}^{N-1} u(x_j)^2 - \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j)u(x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j)u(x_{j+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} u(x_{j+1})^2 + \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j)^2 - 2\sum_{j=0}^{N-1} u(x_j)u(x_{j+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} (u(x_{j+1}) - u(x_j))^2.
\end{aligned}$$

Donc la matrice A est symétrique définie positive. Elle est donc inversible et il existe un unique U_N solution de $AU_N = \mathcal{L}$. On pose alors $u_N = \sum_{j=1}^{N-1} (U_N)_j w_j$.

4. Montrer que si u_N est solution de (8) avec $H = V_N$ et si u est la solution trouvée en 1., alors il existe $C > 0$ indépendante de N telle que

$$\|u - u_N\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{C}{N}.$$

Solution: On montre ce résultat en deux étapes. La première étape consiste à montrer que

$$\|u - u_N\|_{H^1} \leq C \inf_{v \in V_N} \|u - v\|_{H^1}. \tag{9}$$

Il s'agit d'un cas particulier du Lemme de Céa (1964). On peut montrer que $C = \|a\|/\alpha$, où α désigne la constante de coercivité de a. En effet, pour tout $v \in V_N$, on a

$$a(u - u_N, v) = a(u, v) - a(u_N, v) = L(v) - L(v) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned}
\alpha\|u - u_N\|_{H^1}^2 \leq a(u - u_N, u - u_N) &\leq a(u - u_N, u - v) + a(u - u_N, v - u_N) \\
&= a(u - u_N, u - v) \leq \|a\| \|u - u_N\|_{H^1} \|u - v\|_{H^1},
\end{aligned}$$

ce qui donne (9). Dans une seconde étape, on montre que

$$\inf_{v \in V_N} \|u - v\|_{H^1} \leq \frac{\tilde{C}}{N}.$$

En effet, définissons πu la fonction obtenue à partir de u par interpolation linéaire sur $0 = x_0 < \cdots < x_N = 1$. Il s'agit simplement de la fonction affine par morceaux telle que $\pi u(x_j) = u(x_j)$ pour tout $j = 0, \ldots, N$. La dérivée $(\pi u)'$ de πu est la fonction constante par morceaux qui vaut

$$\frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$$

sur chaque $]x_j, x_{j+1}[$. Pour tout $x \in]x_j, x_{j+1}[$ on a

$$u(x) - \pi u(x) = \int_{x_j}^{x} (u - \pi u)'(y) dy,$$

donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|u(x) - \pi u(x)| \leq (x - x_j)^{\frac{1}{2}} \|(u - \pi u)'\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}$$

En élevant au carré et en intégrant en x sur $]x_j, x_{j+1}[$, on obtient

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |u(x) - \pi u(x)|^2 dx \leq \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |(u - \pi u)'(x)|^2 dx \tag{10}$$

Puisque $x_{j+1} - x_j = 1/N$, on obtient en sommant sur j l'inégalité

$$\|u - \pi u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}N} \|(u - \pi u)'\|_{L^2}$$

D'autre part, pour tout $j = 0, \dots, N-1$, on obtient en intégrant par partie

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |(u - \pi u)'|^2 dx = -\int_{x_j}^{x_{j+1}} u''(u - \pi u) dx \leq \|u''\|_{L^2(x_j, x_{j+1})} \|u - \pi u\|_{L^2(x_j, x_{j+1})}.$$

En utilisant (10) puis en sommant sur j, on obtient

$$\|(u - \pi u)'\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}N} \|u''\|_{L^2}.$$

Donc il existe $\tilde{C} = \sqrt{2}\|u''\|_{L^2} > 0$ tel que

$$\|u - \pi u\|_{H^1(0,1)} \leq \frac{\tilde{C}}{N}.$$

En combinant avec (9), on obtient la conclusion souhaitée.

4 Espaces de Sobolev en dimension supérieure

Exercice 4.1 (Injection - Contre-exemple)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. On considère la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x) = \ln\left|\ln \frac{|x|}{4}\right|.$$

1. Montrer que $f \in H^1(\Omega)$.

Solution: On commence par montrer que $f \in L^2(\Omega)$. Pour cela, on effectue la transformation en coordonnées polaires $x = (x_1, x_2) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On trouve alors

$$\int_{B(0,1)} |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left|\ln\left|\ln\left(\frac{r}{4}\right)\right|\right|^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \left|\ln\left|\ln\left(\frac{r}{4}\right)\right|\right|^2 r dr.$$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $|\ln(x)| \leq 1/x$. Donc pour tout $r \in]0, 1]$, on a

$$\left|\ln\left|\ln\left(\frac{r}{4}\right)\right|\right|^2 r \leq \frac{r}{\left|\ln\left(\frac{r}{4}\right)\right|^2} \leq \frac{r}{\ln(4)^2},$$

donc $\int_{B(0,1)} |f(x)|^2 dx < +\infty$ et $f \in L^2(B(0,1))$.
Montrons ensuite que $\nabla f \in L^2(B(0,1))$. On effectue encore un changement de variable en coordonnées polaires. Rappelons que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Notons

$$g(r) = \ln\left|\ln\left(\frac{r}{4}\right)\right|.$$

Alors

$$\int_{B(0,1)} |\nabla f|^2 dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |g'(r)|^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 |g'(r)|^2 r dr.$$

Or

$$g'(r) = -\frac{1}{r\ln\left(\frac{r}{4}\right)},$$

donc

$$\int_{B(0,1)} |\nabla f|^2 dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r\ln^2\left(\frac{r}{4}\right)} dr = \left[\frac{-1}{\ln\left(\frac{r}{4}\right)}\right]_0^1 = \frac{1}{\ln(4)}.$$

Donc $\nabla f \in L^2(B(0,1))$. En conclusion, on a bien $f \in H^1(B(0,1))$.

2. En déduire que $H^1(\Omega)$ ne s'injecte pas dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Solution: Il suffit pour cela d'exhiber une fonction de $H^1(\Omega)$ qui n'est pas continue. C'est le cas de la fonction f définie précédemment, qui n'est pas définie (et en fait pas même bornée) en 0.

Exercice 4.2 (Trace - Contre-exemple)**.** Soit $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. On veut montrer qu'il n'y a pas de notion de trace possible pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, c'est à dire qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\Omega)$ on a

$$\|u_{|\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Dans ce but, construire une suite de fonctions $(u_n) \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n|_{\partial\Omega} \equiv 1$ mais $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$.

Exercice 4.3 (Formule de Green)**.** Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$. Montrer que

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

Exercice 4.4 (Lemme de compacité de Strauss (1977))**.** Soit $d \geq 2$. On désigne par $H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^d)$ à symmétrie radiale, i.e.

$$H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) | \exists v : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ t.q. } u(x) = v(|x|) \text{ p.p.}\}$$

Le but de cet exercice est de montrer que l'injection

$$H^1_{\text{rad}}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d) \text{ pour } 2 < q < 2^*, \text{ où } 2^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } d = 2, \\ \frac{2d}{d-2} & \text{si } d \geq 3, \end{cases}$$

est compacte.

1. Montrer que si on enlève l'hypothèse de symmétrie radiale, alors l'injection $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ pour $2 < q < 2^*$ n'est pas compacte.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x|^{\frac{d-1}{2}} |u(x)| \leq C\|u\|_{H^1}.$$

   Commencer par $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ puis étendre à $H^1(\mathbb{R}^d)$ par densité.
3. Soit (u_n) une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et une sous-suite (u_{n_k}) tels que (u_{n_k}) converge vers u dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ pour tout $2 < q < 2^*$.

Exercice 4.5 (Inégalité de Moser-Trudinger)**.** Soit $R > 0$, $\alpha > 0$, $\Omega = B(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. On souhaite montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{\substack{\|\nabla u\|_{L^2} \leq 1 \\ u \in H^1(\Omega)}} \int_\Omega e^{\alpha |u|^2} dx \begin{cases} \leq C|\Omega| & \text{si } \alpha \leq 4\pi, \\ = +\infty & \text{si } \alpha > 4\pi. \end{cases} \tag{11}$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\|\nabla u\|_{L^2} \leq 1$. Par simplicité, on suppose que u est de classe $\mathcal{C}^1$ et que u est radiale et décroissante, i.e. il existe $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante tel que $u(x) = v(|x|)$ pour tout $x \in \Omega$.

1. On effectue le changement de variable et de fonctions

$$|x| = Re^{-\frac{t}{2}}, \quad w(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} v(|x|) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} u(x).$$

   (i) Montrer que

$$\int_\Omega e^{\alpha |u|^2} dx = |B_R| \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{4\pi} |w(t)|^2 - t\right) dt, \quad \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |w'(t)|^2 dt.$$

   (ii) Montrer que

$$w(0) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} w'(t) = 0, \quad |w'(t)| \leq \sqrt{t}.$$

2. Montrer que (11) est vrai dans le cas $\alpha < 4\pi$.
3. En utilisant la suite (dite de Moser) définie par

$$w_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{n}} & \text{si } 0 \leq t \leq n, \\ \sqrt{n} & \text{si } n < t, \end{cases}$$

   Montrer que (11) est vrai dans le cas $\alpha > 4\pi$.

Le cas critique $\alpha = 4\pi$ ne sera pas traité dans cet exercice.

Exercice 4.6. On veut montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{2+\frac{4}{d}} dx \leq K \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq 1} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)$$

1. Soit $Q = [0, 1]^d$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(Q)$ on a

$$\int_Q |u|^{2+\frac{4}{d}} dx \leq K \left(\int_Q |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}} \left(\int_Q (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx \right)$$

2. En déduire le résultat souhaité.

5 Problèmes aux limites en dimension supérieure

Exercice 5.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. On note $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière de Ω. On définit l'espace H par

$$H = \left\{ U \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) | \operatorname{div} U = 0 \right\}.$$

Les composantes d'un vecteur $U \in H$ seront notées (u_1, u_2). On notera par ∇U le gradient de U et par DU le gradient symétrique de U, i.e.

$$\nabla U = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq 2}, \quad DU = \nabla U + (\nabla U)^T$$

1. Montrer que H muni de la norme

$$\|U\|_H = \left(\|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

   est un espace de Hilbert.

2. Soit $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On définit la notation (produit contracté) de deux matrices carrées de tailles $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ par

$$A : B = \mathrm{Tr}(A^T \cdot B) = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}.$$

Montrer qu'il existe un unique $U \in H$ tel que

$$\int_\Omega DU : DV dx = \int_\Omega F \cdot V dx$$

pour tout $V \in H$.

Exercice 5.2. On pose $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$. Soit $f \in L^2(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on considère le problème

$$\begin{cases} u_n - \frac{1}{n}\Delta u_n = f & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

1. Donner la formulation variationnelle de (12).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ le problème (12) admet une unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$.
3. Montrer les estimations
$$\|u_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla u_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$
4. En déduire que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a
$$\int_\Omega u_n v dx \to \int_\Omega f v dx \text{ quand } n \to +\infty.$$
5. Montrer que pour tout $g \in L^2(\Omega)$, on a
$$\int_\Omega u_n g dx \to \int_\Omega f g dx \text{ quand } n \to +\infty.$$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a
$$\int_\Omega (u_n - f)^2 dx \leq 2\int_\Omega f^2 dx - 2\int_\Omega f u_n dx.$$
7. En déduire que $u_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 5.3 (Problème de convection-diffusion)**.** Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ et $V : \Omega \to \mathbb{R}^d$ régulière telle que $\operatorname{div} V = 0$. On considère le problème de convection-diffusion

$$\begin{cases} V \cdot \nabla u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{13}$$

1. Determiner la formulation variationnelle associée à (13).
2. Montrer que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a
$$\int_\Omega v V \cdot \nabla v dx = 0.$$
3. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible u à (13).
4. Montrer que la solution faible u est telle que $\Delta u \in L^2(\Omega)$.
5. Montrer que la solution faible u ne minimise pas dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle
$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + uV \cdot \nabla u\right) dx - \int_\Omega f u dx.$$

Exercice 5.4 (Problème de conduction)**.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et K un compact connexe inclus dans Ω. On suppose que $\Omega \setminus K$ est régulier. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème (dit de conduction en raison de son origine physique) décrit par

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus K, \\ u = C & \text{sur } \partial K, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, & \end{cases} \tag{14}$$

où u est une fonction inconnue et C une constante dont la valeur n'est pas fixée et dépend de u.

1. Déterminer la formulation variationnelle associée à (14) (on introduira un espace fonctionnel adapté pour tenir compte des conditions au bord).
2. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible u à (14).
3. Montrer que la solution faible u est telle que $\Delta u \in L^2(\Omega \setminus K)$.
4. Sachant que pour tout $v \in H^1(\Omega \setminus K)$ tel que $\Delta v \in L^2(\Omega \setminus K)$ on a $v \in H^2(\Omega \setminus K)$, montrer que la solution faible u vérifie $\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$.

6 Problèmes d'examens

Exercice 6.1. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. ($1/2$ point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   Solution: Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. ($1/2$ point) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.

   Solution: On définit T_f pour chaque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

   $$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f\phi dx.$$

3. ($1/2$ point) Donner un exemple de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui ne peut pas être représentée par une fonction de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

   Solution: La distribution de Dirac en 0 notée δ_0 ne peut pas être représentée par une fonction.

Exercice 6.2. Soit $I =]0, 1[$. On rappelle que $\mathcal{D}(I)$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans I et que $H^1(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de $L^2(I)$ dont la dérivée au sens des distributions est également dans $L^2(I)$.

1. (1 point) Rappeler la définition de l'espace de Sobolev $H^1_0(I)$.

   Solution: L'espace $H^1_0(I)$ est par définition l'adhérence dans $H^1(I)$ de $\mathcal{D}(I)$, l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans I.
   1/2 point si espace des fonctions de H^1 qui valent 0 en 0 et 1.

2. Soit $u \in \mathcal{D}(I)$.

(a) (½ point) Montrer que pour tout $x \in I$ on a

$$u(x) = \int_0^x u'(s)ds, \quad u(x) = \int_1^x u'(s)ds.$$

Solution: Puisque $u \in \mathcal{D}(I)$, sa dérivée u' est bien définie, continue et donc intégrable au sens de Riemann. De plus, u est à support compact dans I, donc

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 1} u(x) = 0.$$

On a donc bien

$$\int_0^x u'(s)ds = u(x) - \lim_{s\to 0} u(s) = u(x), \quad \int_1^x u'(s)ds = u(x) - \lim_{s\to 1} u(s) = u(x).$$

(b) (½ point) En déduire que

$$|u(x)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(s)|ds.$$

Solution: Par l'inégalité triangulaire et en faisant attention à intervertir les bornes dans la seconde intégrale, on a

$$2|u(x)| = \left|\int_0^x u'(s)ds + \int_1^x u'(s)ds\right| \leq \int_0^x |u'(s)|ds + \int_x^1 |u'(s)|ds = \int_0^1 |u'(s)|ds.$$

Cela prouve l'inégalité demandée.

(c) (1 point) En déduire que

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$

Solution: En élevant au carré et en intégrant en x l'inégalité précédente, on obtient

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \leq \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\int_0^1 |u'(s)|ds\right)^2 dx.$$

L'intégrande au second membre ne dépend pas de x. De plus, par l'inégalité de Jensen, on a

$$\left(\int_0^1 |u'(s)|ds\right)^2 \leq \int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$

En combinant les élements précédents, on obtient bien

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{4}\int_0^1 |u'(s)|^2 ds.$$

3. (½ point) Soit $v \in H_0^1(I)$. Montrer que

$$\|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2(I)}.$$

Solution: Puisque $v \in H_0^1(I)$, il existe $(v_n) \subset \mathcal{D}(I)$ telle que $v_n \to v$ dans $H^1(I)$. Par la réponse précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|v_n\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{2}\|v_n'\|_{L^2(I)}.$$

On peut passer à la limite dans l'inégalité pour obtenir l'inégalité souhaitée en v.

4. Soit $c \in L^\infty(I)$. On suppose qu'il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ (le signe de c_0 n'est pas prescrit) tel que pour tout $x \in I$ on a

$$c(x) \geq c_0.$$

On définit sur $H_0^1(I)$ la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I c(x)u(x)v(x)dx.$$

(a) (½ point) Montrer que a est continue.

Solution: Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (combinée avec celle de Hölder pour la seconde intégrale), on a

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2(I)}\|v'\|_{L^2(I)} + \|c\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^2(I)}\|v\|_{L^2(I)} \leq (1 + \|c\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1(I)}\|v\|_{H^1(I)}.$$

Donc a est bien continue sur $H_0^1(I)$.

(b) (½ point) Rappeler la définition d'une forme bilinéaire coercive.

Solution: On dit que a est *coercive* (sur $H_0^1(I)$) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_{H^1(I)}^2.$$

(c) (1 point) Montrer que si $c_0 > -4$, alors a est coercive sur $H_0^1(I)$.

Solution: Pour tout $u \in H_0^1(I)$ on a

$$a(u,u) \geq \|u'\|_{L^2(I)}^2 + c_0\|u\|_{L^2(I)}^2.$$

Par l'inégalité obtenue précédemment on a

$$\|u'\|_{L^2(I)}^2 \geq 4\|u\|_{L^2(I)}^2.$$

Soit $\alpha > 0$ à choisir petit plus tard. On a

$$a(u,u) \geq (1-\alpha)\|u'\|_{L^2(I)}^2 + \alpha\|u'\|_{L^2(I)}^2 + c_0\|u\|_{L^2(I)}^2 \geq (4(1-\alpha) + c_0)\|u\|_{L^2(I)}^2 + \alpha\|u'\|_{L^2(I)}^2.$$

Puisque $c_0 > -4$, on a peut choisir $\alpha > 0$ tel que

$$(4(1-\alpha) + c_0) > \alpha$$

en prenant

$$0 < \alpha < \frac{4 + c_0}{5}.$$

On aura alors

$$a(u,u) \geq \alpha(\|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u\|_{L^2(I)}^2) = \alpha\|u\|_{H^1(I)}^2,$$

ce qui montre la coercivité de a.

(d) (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. Montrer que le problème variationel

$$\forall v \in H_0^1(I), \quad a(u,v) = \int_I f(x)v(x)dx$$

admet une unique solution $u \in H_0^1(I)$.

Solution: Dans l'espace de Hilbert $H_0^1(I)$, la forme bilinéaire a est continue et coercive. Par ailleurs, la forme linéaire définie par

$$v \mapsto \int_I f(x)v(x)dx$$

est continue car, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour tout $v \in H^1(I)$ on a

$$\left| \int_I f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{H^1(I)}.$$

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique fonction $u \in H_0^1(I)$ telle que pour tout $v \in H_0^1(I)$ on a

$$a(u,v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

Exercice 6.3. On rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$.

1. (1 point) Rappeler la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Solution: Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2. (1 point) Étant donné $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, rappeler comment définir une distribution T_f à partir de f.

Solution: On définit T_f pour chaque $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f\phi dx.$$

3. (1 point) À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto |x|^\alpha$ définit-elle une distribution ?

Solution: On veut que $x \mapsto |x|^\alpha$ soit dans l'espace $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Puisque la fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, le seul problème possible est en 0. La fonction sera intégrable en 0 si et seulement si $\alpha > -1$, donc elle définit une distribution si et seulement si $\alpha > -1$.

Exercice 6.4. On se place sur l'intervalle $]0,1[$. Soit $f \in L^2(0,1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donnés. On considère le problème

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases} \tag{P}$$

1. (2 points) On définit l'espace

$$H_{\alpha,\beta} = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}.$$

À quelles conditions sur α et β l'espace $H_{\alpha,\beta}$ est-il un espace de Hilbert ? On commencera par chercher les valeurs de α et β pour lesquelles H est un espace vectoriel.

Solution: Si $\alpha = \beta = 0$, alors $H_{\alpha,\beta} = H_0^1(0,1)$ est un espace de Hilbert. On suppose maintenant que $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, par exemple $\alpha \neq 0$. Soit $u, v \in H_{\alpha,\beta}$. Alors

$$(u+v)(0) = u(0) + v(0) = 2\alpha \neq \alpha.$$

Donc $u + v \notin H_{\alpha,\beta}$. Par conséquent, $H_{\alpha,\beta}$ n'est pas un espace vectoriel, encore moins un espace de Hilbert.

2. (3 points) Soit $g \in L^2(0,1)$. Pour $u, v \in H^1(0,1)$, on définit

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 g(x)v(x)dx.$$

(a) Montrer que a et L sont continues sur $H^1(0,1)$.

Solution: La continuité de a et L est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour tout $u, v \in H^1(0,1)$, on a

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$
$$|L(v)| \leq \|g\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2}\|v\|_{H^1}.$$

(b) Donner un contre-exemple montrant que a n'est pas coercive sur $H^1(0,1)$.

Solution: La fonction $u : x \mapsto 1$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, elle appartient donc à $H^1(0,1)$. Par ailleurs, $\|u\|_{H^1} = 1$. Cependant, on a pour tout $\alpha > 0$ l'inégalité

$$a(u,u) = 0 \leq \alpha\|u\|_{H^1}^2.$$

Donc a n'est pas coercive sur $H^1(0,1)$.

(c) Montrer que a est coercive sur $H_0^1(0,1)$.

Solution: Sur $H_0^1(0,1)$, on a l'inégalité de Poincaré : il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1(0,1)$ on a

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}.$$

Donc pour tout $u \in H_0^1(0,1)$ on a

$$a(u,u) = \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{1}{C}\right)\|u\|_{H^1}^2.$$

Donc a est coercive sur $H_0^1(0,1)$.

3. (2 points) Rappeler l'énoncé du théorème de Lax-Milgram.

Solution: L'énoncé du théorème de Lax-Milgram est le suivant.

Théorème (Lax-Milgram)**.** Soit H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire sur H et L une forme linéaire sur H. On suppose que

(i) a est continue, i.e. il existe $\|a\| \geq 0$ telle que pour tout $u, v \in H$ on a

$$|a(u,v)| \leq \|a\|\|u\|_H\|v\|_H,$$

(ii) a est coercive, i.e. il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in H$ on a

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2,$$

(iii) L est continue, i.e. il existe $\|L\| \geq 0$ telle que pour tout $v \in H$ on a

$$|L(v)| \leq \|L\| \|v\|_H.$$

Alors il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$ on a

$$a(u,v) = L(v).$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique solution du problème de minimisation

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v); \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v).$$

4. (1 point) Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram à a et L dans l'espace $H^1(0,1)$? Dans l'espace $H_0^1(0,1)$? Dans l'espace $H_{\alpha,\beta}$ si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$?

Solution: Dans $H^1(0,1)$, la forme a n'est pas coercive, donc on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram. Par contre, toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées dans $H_0^1(0,1)$. L'espace $H_{\alpha,\beta}$ n'est pas un espace de Hilbert si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, on ne peut donc pas y appliquer le théorème de Lax-Milgram.

5. (1 point) Construire une fonction affine $u_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}^2([0,1])$ telle que $u_{\alpha,\beta}(0) = \alpha$ et $u_{\alpha,\beta}(1) = \beta$.

Solution: On prend la fonction affine définie par

$$u_{\alpha,\beta}(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x.$$

6. (1 point) On suppose maintenant $u_{\alpha,\beta}$ est donnée. Montrer que si u est solution de (P), alors $\tilde{u} = u - u_{\alpha,\beta}$ vérifie

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' = f + u''_{\alpha,\beta}, \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0. \end{cases} \tag{P$_{\text{mod}}$}$$

Solution: La dérivation étant une opération linéaire, on a

$$-\tilde{u}'' = -u'' + u''_{\alpha,\beta},$$

donc par l'équation satisfaite par u on obtient

$$-\tilde{u}'' = f + u''_{\alpha,\beta}.$$

Par ailleurs, en 0 et en 1, on a

$$\tilde{u}(0) = u(0) - u_{\alpha,\beta}(0) = \alpha - \alpha = 0, \quad \tilde{u}(1) = u(1) - u_{\alpha,\beta} = \beta - \beta = 0.$$

Donc si u est solution de (P), alors $\tilde{u}$ vérifie (P$_{\text{mod}}$).

7. (2 points) Montrer qu'il existe une unique solution $\tilde{u} \in H_0^1(0,1)$ au problème (P$_{\text{mod}}$). En déduire l'existence d'une unique solution $u \in H^1(0,1)$ au problème (P).

Solution: On pose $g = f + u''_{\alpha,\beta}$. Le problème (P$_{\text{mod}}$) peut être exprimer variationnellement dans l'espace $H_0^1(0,1)$ à l'aide de la forme bilinéaire a et de la forme linéaire L définies en 2. Par ailleurs,

on a vu en 5. qu'on pouvait appliquer le théorème de Lax-Milgram dans ce cadre. Donc il existe une unique solution $\tilde{u} \in H_0^1(0,1)$ à ($\mathrm{P}_{\mathrm{mod}}$).
En posant $u = \tilde{u} + u_{\alpha,\beta}$, on obtient l'existence d'une solution au problème (P). Reste à montrer l'unicité. Soit $v \in H^1(0,1)$ une solution de (P). Alors $\tilde{v}$ définie par $\tilde{v} = v - u_{\alpha,\beta}$ est solution de ($\mathrm{P}_{\mathrm{mod}}$). Par unicité de $\tilde{u}$, on a nécessairement $\tilde{v} = \tilde{u}$ et donc $v = u$. Donc la solution u de (P) est unique.

8. (1 point) Montrer que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Solution: Puisque $u \in H^1(0,1)$, on a $u \in \mathcal{C}([0,1])$ et $u' \in L^2(0,1)$. Par ailleurs, puisque $f \in L^2(0,1)$, on a $u'' \in L^2(0,1)$. Donc $u' \in H^1(0,1)$, ce qui implique que $u'\mathcal{C}([0,1])$. En conclusion, on a bien $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Exercice 6.5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $\partial\Omega$ sa frontière. On notera les composantes de $x \in \mathbb{R}^2$ par $x = (x_1, x_2)$. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

1. (1 point) Soit $u, v \in H^1(\Omega)$. Compléter la formule de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx = \dots .$$

Solution: On a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_1} dx + \int_{\partial\Omega} uvn_1 d\sigma$$

avec $n = (n_1, n_2)$ la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$.

2. (3 points) Soit $w \in H^2(\Omega)$ une solution du problème

$$-\Delta w + \frac{\partial w}{\partial x_1} = f \text{ dans } \Omega, \quad w = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Définir une forme bilinéaire a, une forme linéaire L et un espace fonctionnel H tels que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées et tels que pour tout $v \in H$, on a

$$a(w, v) = L(v).$$

Le fait que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées devra être justifié. On pourra faire intervenir l'inégalité de Poincaré : il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Solution: On pose $H = H_0^1(\Omega)$ et pour $u, v \in H$ on définit

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx, \quad L(v) = \int_\Omega f v dx,$$

Il est clair que a est bilinéaire et L est linéaire. Pour tout $u, v \in H$ on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$
$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}.$$

Donc a et L sont continues. Remarquons que, d'après la formule de Green et puisque $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} u dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}(u^2) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 n_1 d\sigma = 0.$$

Donc, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{1}{C}\right) \|u\|_{H^1}^2.$$

Donc a est coercive. L'espace $H_0^1(\Omega)$ étant un espace de Hilbert, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Finalement, montrons que pour tout $v \in H$ on a

$$a(w,v) = L(v).$$

Soit $v \in H$. D'après la formule de Green on a

$$\int_\Omega -\Delta w v dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v d\sigma + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx.$$

Par ailleurs, puisque $v \in H = H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v d\sigma = 0$$

On multiplie par v l'équation satisfaite par w, intègre sur Ω et on utilise la formule précédente pour trouver

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx + \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_1} v dx = \int_\Omega f v dx,$$

autrement dit,

$$a(w,v) = L(v).$$

Ceci conclue la réponse.

Exercice 6.6. Soit $I =]0,1[$. On définit l'espace

$$H_g^1(I) = \left\{ u \in H^1(I) : u(0) = 0 \right\}.$$

1. (1 point) Montrer que $H_g^1(I)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$.

Solution: L'application $\Phi : H^1(I) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(u) = u(0)$ pour tout $u \in H^1(I)$ est une application linéaire. Elle est de plus continue. En effet, il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(I)$, en utilisant l'injection $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$, on a

$$|\Phi(u)| = |u(0)| \leq \|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{H^1}.$$

Par définition, l'espace $H_g^1(I)$ est le noyau de Φ, donc c'est un sous-espace fermé de $H^1(I)$.

2. (1 point) On note $\mathcal{D}(]0,1])$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]0,1]$. Montrer que $\mathcal{D}(]0,1])$ est dense dans $H_g^1(I)$ (on pourra s'appuyer sur la densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H_0^1(I)$).

Solution: Soit $u \in H_g^1(I)$. Par l'injection $H^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{I})$, u est continue et en particulier $u(1)$ est bien définie. Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\phi \geq 0$ et $\int_I \phi(x)dx = 1$. Définissons

$$\tilde{u} = u - u(1)\chi(x), \quad \chi(x) := \int_0^x \phi(y)dy.$$

Alors $\tilde{u} \in H^1(I)$ et $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0$, donc $\tilde{u} \in H^1_0(I)$. Par densité de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1_0(I)$, il existe une suite $(\tilde{u}_n) \subset \mathcal{D}(I)$ telle que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H^1(I)$. Remarquons que la fonction χ définie plus haut appartient à $\mathcal{D}(]0,1])$. Par conséquent, la suite (u_n) définie par

$$u_n(x) = \tilde{u}_n(x) + u(1)\chi(x)$$

est incluse dans $\mathcal{D}(]0,1])$. De plus, on a $u_n \to u$ dans $H^1(I)$. En conclusion, tout élément de $H^1_g(I)$ peut être approché par une suite de $\mathcal{D}(]0,1])$.

3. (a) (1 point) Soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1])$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\int_0^1 \phi^2(x)dx \leq C \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx.$$

Solution: Une stratégie possible est d'écrire la fonction ϕ^2 comme la primitive de sa dérivée. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 \phi^2(x)dx = \int_0^1 \int_0^x 2\phi'(y)\phi(y)dy \leq 2 \left(\int_0^1 \phi^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (\phi'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, on a

$$\int_0^1 \phi^2(x)dx \leq 4 \int_0^1 (\phi'(x))^2 dx.$$

(b) (1 point) En déduire que pour tout $u \in H^1_g(I)$ on a

$$\|u\|^2_{L^2(I)} \leq C\|u'\|^2_{L^2(I)}.$$

Solution: Soit $u \in H^1_g(I)$. Par densité de $\mathcal{D}(]0,1])$ dans $H^1_g(I)$, il existe $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1])$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(I)$. En particulier, on a

$$\|u_n\|_{L^2} \to \|u\|_{L^2}, \quad \|u'_n\|_{L^2} \to \|u'\|_{L^2}.$$

Puisque $(u_n) \subset \mathcal{D}(]0,1])$, on a par la réponse précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité

$$\|u_n\|^2_{L^2(I)} \leq C\|u'_n\|^2_{L^2(I)}.$$

Par passage à la limite, on obtient la même inégalité pour u.

4. On définit sur $H^1_g(I)$ la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I u'(x)v(x)dx.$$

(a) (1 point) La forme bilinéaire a est-elle symétrique (justifier votre réponse) ?

Solution: La forme a n'est en apparence pas symétrique.Confirmons le par un contre-exemple. Prenons les deux fonctions $u, v \in H^1_g(I)$ définies par $u(x) = x$ et $v(x) = x^2$. Alors

$$a(u,v) = \int_0^1 2x dx + \int_0^1 x^2 dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3},$$
$$a(v,u) = \int_0^1 2x dx + \int_0^1 2x^2 dx = \left[x^2 + \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

On a bien $a(u,v) \neq a(v,u)$. Notons que le fait que a ne soit pas symétrique en apparence ne suffit pas à prouver qu'elle ne l'est effectivement pas. En effet, prenons par exemple la forme définie sur $\mathcal{D}(]0,1[)$ par

$$b(u,v) = \int_0^1 u''(x)v(x)dx.$$

En apparence, on a $b(u,v) \neq b(v,u)$, cependant une double intégration par partie nous montre qu'en fait on a $b(u,v) = b(v,u) \in \mathcal{D}(]0,1[)$.

(b) (1 point) Montrer que a est continue et coercive sur $H_g^1(I)$.

Solution: Soit $u, v \in H_g^1(I)$. On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

donc a est continue. Montrons que a est coercive. On a

$$\int_0^1 u'(x)u(x)dx = \left[\frac{1}{2}u^2(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}u^2(1) > 0.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{1}{C}\right)\|u\|_{H^1}^2.$$

En combinant les deux inégalités, on voit qu'il existe $\alpha = \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{1}{C}\right) > 0$ tel que pour tout $u \in H_g^1(I)$ on a

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|_{H^1}^2,$$

autrement dit a est coercive.

5. (1 point) Soit $f \in L^2(I)$. On définit la forme linéaire L sur $H_g^1(I)$ par

$$L(v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

Montrer que L est continue.

Solution: La forme L est continue car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour tout $v \in H_g^1(I)$ l'estimation

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$$

6. (1 point) Montrer qu'il existe un unique $u \in H_g^1(I)$ tel que pour tout $v \in H_g^1(I)$ on a

$$a(u,v) = L(v).$$

Solution: Il s'agit d'une application directe du théorème de Lax-Milgram. En effet, l'espace $H_g^1(I)$ est un espace de Hilbert sur lequel la forme bilinéaire a est continue et coercive et la forme linéaire L est continue, donc il existe un unique u avec la propriété demandée.

7. (1 point) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par u au sens des distributions.

Solution: Soit $v \in \mathcal{D}(I)$. Puisque
$$a(u,v) = L(v),$$
et que
$$\langle T_u'', v\rangle = -\int_I u'(x)v'(x)dx,$$
la fonction u vérifie au sens des distribution l'équation différentielle
$$-u'' + u' = f.$$

8. (1 point) Montrer que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Solution: On a $u \in H^1(I)$. De plus, puisque $u'' = u' - f$, on a $u'' \in L^2(I)$ et donc $u \in H^2(I)$. De plus, on a l'injection $H^2(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\bar{I})$, donc $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

9. (1 point) Calculer $u'(1)$.

Solution: Soit $v \in H^1_g(I)$. On a
$$a(u,v) = L(v)$$
et donc par intégration par partie et en utilisant $v(0) = 0$ on a
$$u'(1)v(1) + \int_I (-u'' + u' - f)vdx = 0,$$
et par l'équation satisfaite par u on a donc
$$u'(1)v(1) = 0.$$
La fonction définie par $v(x) = x$ est bien dans $H^1_g(I)$, donc
$$u'(1) = 0.$$

10. (1 point) Écrire le problème aux limites vérifié par u.

Solution: En rassemblant les informations précédemment obtenues, on s'aperçoit que u vérifie le problème aux limites suivant
$$\begin{cases} -u'' + u' = f & \text{sur } I, \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 6.7. Soient deux fonctions $f \in L^2(0,1)$ et $\alpha \in L^\infty(0,1)$ telle que $\alpha(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in [0,1]$. On considère une forme bilinéaire a et une forme linéaire L définies pour $u, v \in H^1(0,1)$ par
$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \alpha(x)u(x)v(x)dx, \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$
On désigne par V_0 et V_ε pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ les sous-espaces de $H^1(0,1)$ suivants :
$$V_0 = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}, \quad V_\varepsilon = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = \varepsilon v(1)\}.$$

1. (a) Montrer que V_0 et V_ε munies de la norme induite par celle de $H^1(0,1)$ sont des espaces de Hilbert.

Solution: Les espaces V_0 et V_ε sont les noyaux des formes linéaires continues définies sur $H^1(\mathbb{R})$ par

$$v \mapsto v(0), \quad v \mapsto \varepsilon v(1) - v(0).$$

Ce sont donc des sous-espaces vectoriels fermés de $H^1(0,1)$. L'espace $H^1(0,1)$ étant de Hilbert, il en va de même pour V_0 et V_ε.

(b) Montrer que a et L sont continues sur V_0 et V_ε.

Solution: Soient $u, v \in H^1(\mathbb{R})$. On a par les inégalités de Hölder et Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|\alpha\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq (1 + \|\alpha\|_{L^\infty})\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$
$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}.$$

Par conséquent, a et L sont continues sur $H^1(\mathbb{R})$.

2. (a) Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que pour tout $v \in V_0$ on a

$$\|v\|_{L^2} \leq C_1\|v'\|_{L^2}. \tag{15}$$

Solution: Soit $v \in V_0$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|v^2(x)| = \left|\int_0^x 2v(x)v'(x)dx\right| \leq 2\|v\|_{L^2}\|v'\|_{L^2},$$

et donc

$$\|v\|_{L^2} \leq 2\|v'\|_{L^2},$$

ce qui est l'inégalité demandée avec $C_1 = 2$.

(b) En déduire l'existence d'un unique $u_0 \in V_0$ tel que pour tout $v \in V_0$ on a

$$a(u_0, v) = L(v). \tag{16}$$

Solution: On a déjà vu que a et L sont continues. Puisque $\alpha \geq 0$ presque partout, pour tout $u \in V_0$ on a

$$a(u,u) \geq \|u'\|_{L^2}^2.$$

En combinant avec (15), on obtient

$$a(u,u) \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2C_1}\right)\|u\|_{H^1}^2,$$

donc a est coercive. Les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont vérifiées et il existe donc un unique $u_0 \in V_0$ tel que pour tout $v \in V_0$ on a

$$a(u_0, v) = L(v).$$

3. (a) Montrer que, au sens des distributions, u_0 vérifie une équation différentielle du second ordre.

Solution: Soit $v \in \mathcal{D}(0,1)$. Alors $v \in V_0$ et on a

$$a(u_0, v) = L(v).$$

En explicitant a et L, on obtient

$$\int_0^1 u_0'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \alpha(x)u_0(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Par ailleurs, au sens des distributions, on a

$$\int_0^1 u_0'(x)v'(x)dx = \langle u_0', v'\rangle = -\langle u_0'', v\rangle.$$

Par conséquent, au sens des distributions, on a

$$-u_0'' + \alpha u_0 = f.$$

(b) En déduire que $u_0 \in H^2(0,1)$.

Solution: On a déjà $u_0 \in H^1(0,1)$. De plus, puisque

$$u_0'' = \alpha u_0 - f,$$

on a $u_0'' \in L^2(0,1)$ et par conséquent $u_0 \in H^2(0,1)$.

(c) En déduire également que pour tout $v \in V_0$ on a

$$a(u_0, v) - L(v) = u'(1)v(1).$$

Solution: Soit $v \in V_0$. En multipliant par v l'équation satisfaite par u_0, puis en intégrant par partie, on obtient

$$a(u_0, v) - L(v) = u'(1)v(1) - u'(0)v(0).$$

Comme par ailleurs $v(0) = 0$, on a bien l'égalité voulue.

(d) Déduire de (c) que u_0 vérifie une équation différentielle du second ordre avec *deux* conditions au bord.

Solution: Soit $v \in V_0$ telle que $v(1) \neq 0$ (par exemple $v(x) = x$). Alors d'après (16) on a

$$a(u_0, v) = L(v),$$

ce qui combiné avec la réponse à la question précédente implique que

$$u'(1)v(1) = 0.$$

Comme de plus $v(1) \neq 0$, on a

$$u'(1) = 0.$$

La fonction u_0 vérifie donc le problème suivant

$$-u_0'' + \alpha u_0 = f, \quad u_0(0) = 0, \quad u_0'(1) = 0.$$

(e) Montrer que si $\tilde{u}_0$ est une autre solution de l'équation différentielle avec conditions aux bords vérifiée par u_0, alors pour tout $v \in V_0$ on a

$$a(\tilde{u}_0, v) = L(v).$$

Solution: Soit $\tilde{u}_0 \in H^1(0,1)$ telle que

$$-\tilde{u}_0'' + \alpha \tilde{u}_0 = f, \quad \tilde{u}_0(0) = 0, \quad \tilde{u}_0'(1) = 0.$$

En multipliant par $v \in V_0$ et en intégrant par partie, on obtient

$$a(\tilde{u}_0, v) = L(v) + \tilde{u}_0'(1)v(1) - \tilde{u}_0'(0)v(0).$$

Puisque $\tilde{u}_0'(1) = v(0) = 0$, on a bien

$$a(\tilde{u}_0, v) = L(v).$$

4. Soit $v \in V_\varepsilon$ et w définie par $w(x) = v(x) - v(0)$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (a) Observer que $w \in V_0$ et en déduire l'existence d'une constante C_2 *indépendante de ε et de v* telle que
   $$\|v\|_{L^2} \leq C_2 \|v'\|_{L^2}. \tag{17}$$

Solution: Puisque $w(0) = v(0) - v(0) = 0$ et $v \in H^1(0,1)$, on a bien $w \in V_0$. De plus,

$$\|v\|_{L^2}^2 = \|w + v(0)\|_{L^2}^2 = \|w\|_{L^2}^2 + 2v(0)\int_0^1 w(x)dx + v^2(0).$$

Montrons que le membre de droite peut s'estimer en fonction de $\|v'\|_{L^2}^2$. En effet, on a $v' = w'$, donc par l'inégalité de Poincaré obtenue en (15) on a

$$\|w\|_{L^2}^2 \leq C_1 \|v'\|_{L^2}^2.$$

Par ailleurs, on a

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)|v(0)| = |v(1) - v(0)| = \left|\int_0^1 v'(x)dx\right| \leq \int_0^1 \left|v'(x)\right| dx = \|v'\|_{L^1} \leq \|v'\|_{L^2}.$$

Remarquons que puisque $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on a

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) > 1.$$

Par conséquent, on a

$$|v(0)| \leq \|v'\|_{L^2}.$$

Finalement, le terme central s'estime de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\left|2v(0)\int_0^1 w(x)dx\right| &\leq |v(0)|^2 + \left(\int_0^1 w(x)dx\right)^2 \\ &\leq |v(0)|^2 + \left(\int_0^1 |w(x)|^2 dx\right)^2 \leq (1 + C_1)\|v'\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien

$$\|v\|_{L^2} \leq C_2 \|v'\|_{L^2}$$

avec $C_2 > 0$ indépendante de ε.

   (b) En déduire l'existence d'un unique $u_\varepsilon \in V_\varepsilon$ tel que pour tout $v \in V_\varepsilon$ on a
   $$a(u_\varepsilon, v) = L(v). \tag{18}$$

Solution: On se place dans l'espace de Hilbert V_ε. La continuité de a et L s'obtiennent de la même manière que précédement. La coercivité de a également, à condition de remplacer l'inégalité (15) par l'inégalité (17). Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence et l'unicité de u_ε.

5. En reprenant les étapes de la question 3, montrer que u_ε peut être caractérisé comme la solution d'une équation différentielle du second ordre avec conditions aux limites.

Solution: De la même manière que précédement, on observe que u_ε vérifie au sens des distributions l'équation différentielle

$$-u_\varepsilon'' + \alpha u_\varepsilon = f.$$

On en déduit que $u_\varepsilon \in H^2(0,1)$. Soit $v \in V_\varepsilon$. En intégrant par partie dans (18) et en utilisant l'équation différentielle vérifiée par u_ε, on obtient

$$u_\varepsilon'(1)v(1) - u_\varepsilon'(0)v(0) = 0.$$

Puisque v est dans V_ε, on en conclut que

$$(u_\varepsilon'(1) - \varepsilon u_\varepsilon'(0))v(1) = 0.$$

En choisant $v \in V_\varepsilon$ telle que $v(1) \neq 1$ (par exemple $v(x) = \varepsilon + x(1-\varepsilon)$), il vient

$$u_\varepsilon'(1) = \varepsilon u_\varepsilon'(0).$$

Le problème aux limites vérifié par u_ε est donc

$$-u_\varepsilon'' + \alpha u_\varepsilon = f, \quad u_\varepsilon(0) = \varepsilon u_\varepsilon(1), \quad u_\varepsilon'(1) = \varepsilon u_\varepsilon'(0).$$

6. (a) Montrer qu'il existe une constant C_3 indépendante de ε telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C_3 \|f\|_{L^2}. \tag{19}$$

Solution: Par (18) avec $v = u_\varepsilon$, on a

$$a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = L(u_\varepsilon).$$

Par coercivité de a sur V_ε (avec constante de coercivité $\alpha > 0$ indépendante de ε car C_2 ne dépend pas de ε) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\alpha \|u_\varepsilon\|_{H^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u_\varepsilon\|_{L^2}.$$

Par conséquent, il existe $C_3 > 0$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C_3 \|f\|_{L^2}.$$

(b) En déduire l'existence d'une constante C_4 telle que

$$|u_\varepsilon(0)| \leq C_4 \varepsilon. \tag{20}$$

Solution: Par injection de $H^1(0,1)$ dans $L^\infty(0,1)$, il existe $C > 0$ telle que

$$|u_\varepsilon(0)| = \varepsilon|u_\varepsilon(1)| \leq \varepsilon\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \varepsilon C\|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq \varepsilon CC_3\|f\|_{L^2},$$

ce qui est l'inégalité demandée avec $C_4 = CC_3\|f\|_{L^2}$.

7. Le but de cette question est de montrer que

$$u_\varepsilon \to u_0 \text{ dans } H^1(0,1) \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Pour $u \in H^1(0,1)$, on pose

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha(x)|u(x)|^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx.$$

(a) Quelle hypothèse supplémentaire du théorème de Lax-Milgram permet de conclure que

$$J(u_0) = \min_{v\in V_0} J(v), \quad J(u_\varepsilon) = \min_{v\in V_\varepsilon} J(v).$$

Solution: La fonctionnelle a est symétrique, donc la seconde partie du théorème de Lax-Milgram permet d'obtenir la conclusion souhaitée car

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u).$$

(b) Soit v_ε définie par $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(0)$. En remarquant que $v_\varepsilon \in V_0$, montrer que

$$J(v_\varepsilon) \geq J(u_0). \tag{21}$$

Solution: Puisque $u_\varepsilon \in H^1(0,1)$ et $v_\varepsilon(0) = 0$, on a $v_\varepsilon \in V_0$ et donc

$$J(u_0) \leq J(v_\varepsilon).$$

(c) En utilisant (20), montrer qu'il existe C_5 indépendante de ε telle que

$$J(u_\varepsilon) \geq J(v_\varepsilon) - C_5\varepsilon.$$

Solution: On a

$$J(u_\varepsilon) = J(v_\varepsilon + u_\varepsilon(0)) = J(v_\varepsilon) + a(u_\varepsilon, u_\varepsilon(0)) + \frac{1}{2}a(u_\varepsilon(0), u_\varepsilon(0)) - L(u_\varepsilon(0)).$$

En calculant, on voit que

$$\begin{aligned}
|a(u_\varepsilon, u_\varepsilon(0))| &\leq |u_\varepsilon(0)|\int_0^1 \alpha(x)|u_\varepsilon(x)|dx \leq |u_\varepsilon(0)|\|u_\varepsilon\|_{L^2}\|\alpha\|_{L^2},\\
a(u_\varepsilon(0), u_\varepsilon(0)) &= u_\varepsilon(0)^2\|\alpha\|_{L^1},\\
L(u_\varepsilon(0)) &= u_\varepsilon(0)\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

En utilisant (19) et (20), on obtient l'existence de $C_5 > 0$ telle que

$$J(u_\varepsilon) = J(v_\varepsilon) - C_5\varepsilon.$$

(d) Soit w_ε défini par $w_\varepsilon(x) = u_0(x) + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}u_0(1)$. Vérifier que $w_\varepsilon \in V_\varepsilon$ et montrer qu'il existe C_6 indépendante de ε telle que

$$J(u_0) \geq J(w_\varepsilon) - C_6\varepsilon \geq J(u_\varepsilon) - C_6\varepsilon \geq J(v_\varepsilon) - (C_5 + C_6)\varepsilon. \tag{22}$$

Solution: Puisque $u_0 \in H^1(0,1)$ et $w_\varepsilon(0) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}u_0(1) = \varepsilon w_\varepsilon(1)$, on a bien $w_\varepsilon \in V_\varepsilon$. Par conséquent, on a

$$J(w_\varepsilon) \geq J(u_\varepsilon).$$

Par ailleurs, en écrivant

$$J(u_0) = J\left(w_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}u_0(1)\right)$$

et en développant et estimant comme précédement, on trouve qu'il existe C_6 telle que

$$J(u_0) \geq J(w_\varepsilon) - C_6\varepsilon.$$

En combinant les différentes inégalités obtenues dans cette réponse et la précédente, on trouve bien

$$J(u_0) \geq J(w_\varepsilon) - C_6\varepsilon \geq J(u_\varepsilon) - C_6\varepsilon \geq J(v_\varepsilon) - (C_5 + C_6)\varepsilon.$$

(e) Déduire des questions précédentes que $J(u_\varepsilon) \to J(u_0)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Solution: En combinant (21) et (22), on obtient

$$J(u_0) \geq J(u_\varepsilon) - C_6\varepsilon \geq J(u_0) - (C_5 + C_6)\varepsilon,$$

ce qui implique que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J(u_\varepsilon) = J(u_0).$$

(f) Montrer que $u_\varepsilon \to u_0$ dans $H^1(0,1)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Solution: Par bilinéarité de a, on a l'identité du parallèlogramme

$$a(u-v, u-v) = 2a(u,u) + 2a(v,v) - a(u+v, u+v).$$

En faisant apparaître J, on obtient

$$a(u-v, u-v) = 4J(u) + 4J(v) - 8J\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Par coercivité de a et en choisissant $u = u_0$, $v = v_\varepsilon$, on obtient pour un certain $C > 0$

$$C\|v_\varepsilon - u_0\|_{H^1}^2 \leq J(u_0) + J(v_\varepsilon) - 2J\left(\frac{u_0 + v_\varepsilon}{2}\right).$$

Comme $\frac{u_0+v_\varepsilon}{2} \in V_0$, on a

$$J(u_0) \leq J\left(\frac{u_0 + v_\varepsilon}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$C\|v_\varepsilon - u_0\|_{H^1}^2 \leq J(v_\varepsilon) - J(u_0) \leq J(u_\varepsilon) - J(u_0) + C_5\varepsilon.$$

Par conséquent, v_ε converge vers u_0 dans $H^1(0,1)$. Comme $v_\varepsilon = u_\varepsilon - u_\varepsilon(0)$ et $u_\varepsilon(0) \to 0$, on a bien $u_\varepsilon \to u_0$ dans $H^1(0,1)$.