Compression élastique d'une colonne

On considère une colonne de longueur $l = 2m$ en acier conique de rayons $r_0 = 2,5cm$ et $r_1 = 5cm$ à ses deux extrémités.

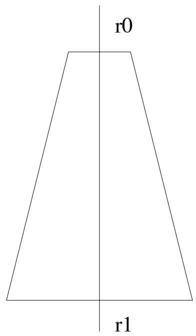

Figure 1. Colonne considérée : le cône.

Question 1 : Si on effectue une coupe du cône par un plan passant par l'axe du cône, on obtient une représentation 2D grâce à laquelle, il est facile de retrouver le rayon (MH sur la figure 2) de la colonne à une distance x de son extrémité.

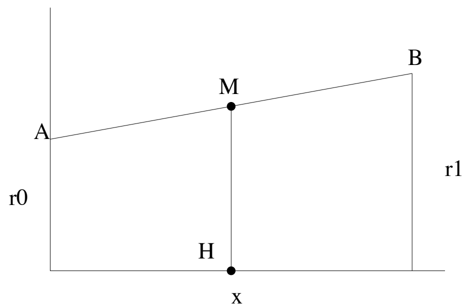

Figure 2. Représentation d'une moitié de la coupe du cône par un plan.

Ici la droite (AB) a pour équation $y = \frac{r_1 - r_0}{l}x + r_0 = r(x)$.

Question 2 : L'aire d'une coupe (en x) est donc $A(x) = \pi r(x)^2 = \pi(\frac{r_1-r_0}{l}x + r_0)^2$.

Question 3 : $u(x)$ est solution de l'EDO $\frac{du(x)}{dx} = \frac{F}{EA(x)} = \frac{F}{E\pi(\frac{r_1-r_0}{l}x+r_0)^2}$ qui est de la forme $\frac{du(x)}{dx} = K\frac{v'(x)}{v^2(x)}$ où K est une constante égale à $\frac{l}{r1-r_0}\frac{F}{E\pi}$ et $v(x) = (\frac{r_1-r_0}{l}x + r_0)$.
On intègre par rapport à x ce qui nous donne

$$u(x) = -\frac{K}{v(x)} + \text{Constante} = -\frac{l}{r1 - r_0}\frac{F}{E\pi(\frac{r_1-r_0}{l}x + r_0)} + \text{Constante}.$$

Sachant $u(0) = 0$ on peut déterminer la valeur de la constante

$$\text{Constante} = \frac{l}{r1 - r_0}\frac{F}{E\pi(\frac{r_1-r_0}{l}l + r_0)}.$$

Question 4 : Pour $l = 2$, $F = 400$, $E = 210 \times 10^9$, $r_0 = 0.025$ et $r_1 = 0.05$ on obtient (voir figure 3)

$$u(x) = -1.523809524 \times 10^{-7} \frac{1}{\pi\ (0.0125\, x + 0.025)} + 6.095238096 \times 10^{-6}\, \pi^{-1}.$$

Pour connaître la compression totale subie par la colonne, il suffit de calculer le déplacement en $x = 2$, ce qui donne

$$\text{déplacement} = 9.700872720 \times 10^{-7}.$$

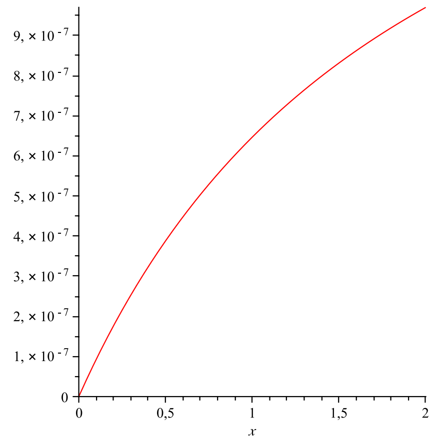

Figure 3. Représentation de $u(x)$.

Cette approche n'est malheureusement possible que pour des expressions simples de $A(x)$. Pour arriver à conclure en toute situation on doit faire appel à des méthodes numériques.

Question 5 : Appliquer la méthode de Euler pour retrouver ce résultat.

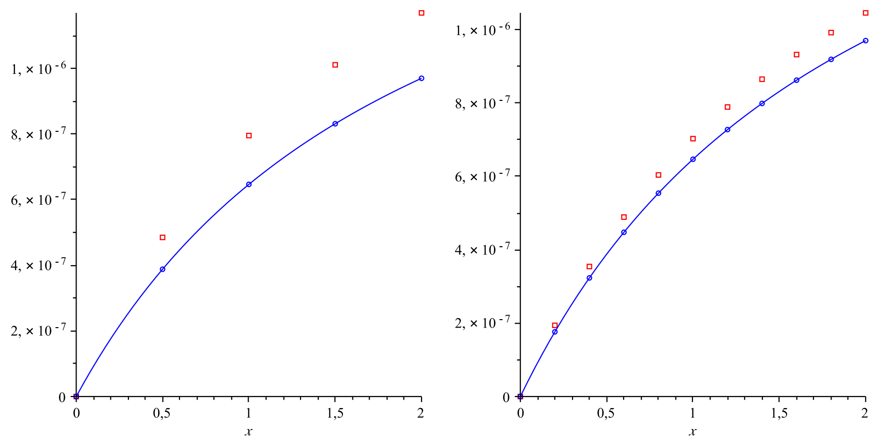

Figure 4. Méthode de Euler $n = 4$ et $n = 10$, solution exacte et solution approchée (points).

Pour $n = 4$ on obtient

x_i	u_i	$\lvert u(x_i) - u_i \rvert$
0.0	0.0	0.0
0.5000000000	0.0000004850436360	0.00000009700872727
1.0	0.0000007954715633	0.0000001487467153
1.500000000	0.000001011046513	0.0000001795431369
2.0	0.000001169428108	0.0000001993408363

Pour $n = 10$

x_i	u_i	$\lvert u(x_i) - u_i \rvert$
0.0	0.0	0.0
0.2000000000	0.0000001940174544	0.00000001763795043
0.4000000000	0.0000003543624580	0.00000003100003397
0.6000000000	0.0000004890968012	0.00000004136421405
0.8000000000	0.0000006039000286	0.00000004956444458
1.0	0.0000007028885260	0.00000005616367792
1.200000000	0.0000007891185057	0.00000006155305168
1.400000000	0.0000008649065738	0.00000006601117325
1.600000000	0.0000009320406412	0.00000006974084393
1.800000000	0.0000009919225717	0.00000007289252465
2.0		0.00000007557974700

Question 6 : Appliquer la méthode de Runge-Kutta pour retrouver ce résultat.

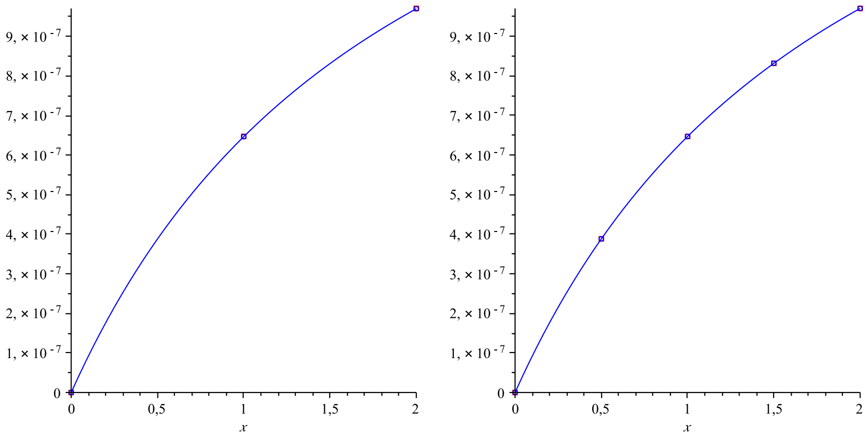

Figure 5. Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, $n = 2$ et $n = 4$, solution exacte et solution approchée (points).

Pour $n = 2$

x_i	u_i	$\lvert u(x_i) - u_i \rvert$
0.0	0.0	0.0
1.0	0.0000006474434313	0.0000000007185832946
2.0	0.0000009708975114	0.0000000008102393531

Pour $n = 4$

x_i	u_i	$\lvert u(x_i) - u_i \rvert$
0.0	0.0	0.0
0.5000000000	0.0000003880748299	$3.992115268 \times 10^{-11}$
1.0	0.0000006467766466	$5.179856777 \times 10^{-11}$
1.500000000	0.0000008315595134	$5.613744982 \times 10^{-11}$
2.0	0.0000009701452423	$5.797027815 \times 10^{-11}$

Question 7 : Comparer les deux méthodes de calculs et interpréter les résultats.
Comment faire mieux que 2 itérations!!!!!!!!!!!!!!!!!!