Correction - Équation Non linéaire

Flotteur dans une cuve

Question 1 : On retrouve l'expression de $A(X_0)$ en utilisant la formule de pythagore $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2}$ où 0 est le centre de la sphère, B le point sur l'axe vertical repéré par X_0 et A un point sur le bord de la sphère contenu dans le plan de coupe. Ainsi $OB = X$ et $OA = r$. L'aire du disque (de la coupe) contenant les points A et B est donc donnée par $A = \pi AB^2 = \pi(r^2 - X_0^2)$.
Partant de $V = \int_{X=r-x}^{X=r} \pi(r^2 - X^2)dX$ par calcul intégral on obtient que $V = \pi \left[r^2 X - \frac{X^3}{3}\right]_{X=r-x}^{X=r}$

$$V = \frac{\pi x^2(3r - x)}{3}.$$

Question 2 : Le bilan des forces s'exprime :
(Volume du flotteur)x(Densité du flotteur)x(Accélération de la pesanteur)=
(Volume immergé du flotteur)x(Densité de l'eau)x(Accélération de la pesanteur)

$$\underbrace{V_{\text{sphère}}}_{\frac{4}{3}\pi r^3} \times \rho_f \times g = V \times \rho_w \times g.$$

En utilsant le résultat de la question 1, on retrouve facilement que

$$4r^2\gamma - 3x^2 r + x^3 = 0 \text{ où } \gamma = \frac{\rho_f}{\rho_w}.$$

Question 3 : Pour $\gamma = 0.6$ et $r = 0.055m$ (attention aux unités), on doit résoudre

$$3.993 \times 10^{-4} - 0.165x^2 + x^3 = 0.$$

Le choix de la valeur initiale est choisie la plus proche possible de la solution donc entre 0 et $2r = 0.110$. On pourra prendre $x_0 = 0.055$. (Un tracé de la courbe pour x appartenant à cet intervalle aurait pu nous donner des informations supplémentaires).

3a : Méthode de point fixe. (non corrigée).
3b : Méthode de Newton. Si on effectue les calcul sur 5 décimales significatives on obtient

$$x_1 = 0.06242, \ x_2 = 0.06238, \ x_3 = 0.06238$$

Il semble que 3 itérations suffisent pour atteindre une valeur raisonnable. Si l'on cherche à caractériser l'erreur d'approximation, on peut calculer les erreurs relatives suivantes

$$\left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \times 100 = 19,90\%$$

$$\left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100 = 0.0716\%$$

$$\left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \times 100 = 0\%$$

3c : Interprétation physique : la sphère est immergée à plus de la moitié.