Action du vent sur le mat d'un bateau à voile [1]

On considère un bateau schématisé par la figure 1. Son mat est soumis à une force exercée par le vent. Le mat (mast) de longueur L est représenté par le segment $[AB]$. La voile exerce sur le mat une force. On définit un repère sur le mat ayant pour origine la base du mat A, x servant alors à mesure la hauteur d'un point du mat. Si on se place à une hauteur x, la force exercée sur un élément infinitésimal dx (juste autour de x) a une amplitude égale à $f(x)dx$ où

$$f(x) = \frac{\alpha x}{x+\beta} e^{-\gamma x}$$

α, β, γ étant des constantes données. Il est alors possible de définir une force résultante d'amplitude R donnée par

$$R = \int_0^L f(x)\, dx := I(f)$$

appliquée en un point se trouvant à une hauteur b sur le mat (voir la figure 1). De plus il est possible de déterminer b à l'aide de l'expression

$$b = \frac{I(xf)}{I(f)}.$$

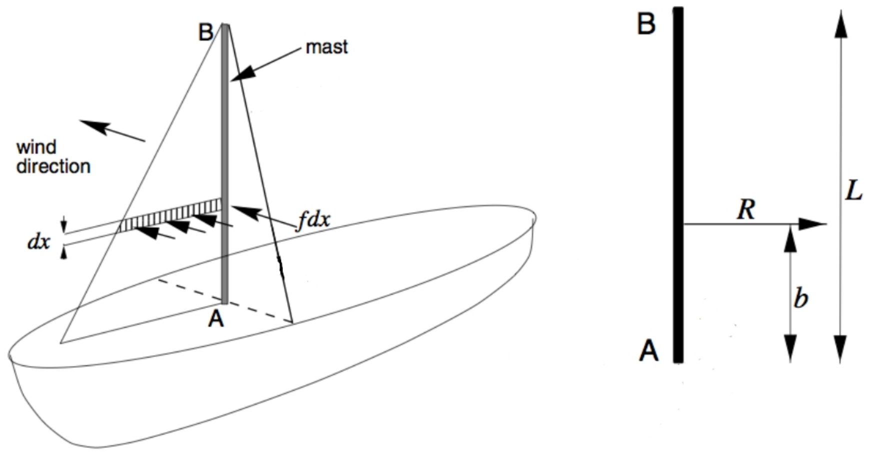

Figure 1. Forces appliquées sur le mat d'un bateau.

Il est évident que les calculs de R et b jouent des rôles centraux dans la conception des bateaux à voiles. [2] Malheureusement ces calculs ne peuvent être fait qu'avec des méthodes d'approximations numériques comme celles vues en cours.

Par la suite, on fixe les paramètres du problème $\alpha = 50$, $\beta = \frac{5}{3}$, $\gamma = \frac{1}{4}$ et $L = 10$.

Question 1) Représenter à main levée la fonction f. Donner une interprétation physique.

Question 2) Mettre en œuvre la méthode des rectangles (avec un nombre de points raisonnable) pour déterminer une valeur approchée R_1 de R.

1. Exemple issu du livre "Numerical Mathematics" écrit par A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. (ed. Springer).
2. Si R et b sont connues, une étude statique du système mat/câble peut être réalisée.

Question 3) Mettre en œuvre la méthode des trapèzes pour déterminer une valeur approchée R_2 de R.

Question 4) A l'aide d'un changement de variable (à justifier) montre que

$$R = \int_{-1}^{1} L^2 \frac{\alpha(x+1)}{L(x+1)+2\beta} e^{-\gamma \frac{L}{2}(x+1)} dx.$$

Utiliser une formule de quadrature de Gauss-Legendre pour déterminer une valeur approchée R_3 de R.

Question 5) Sachant qu'une bonne valeur approchée de R_{ref} est 100.0613684. Commenter les résultats obtenus.