Algèbre linéaire
Correction succincte

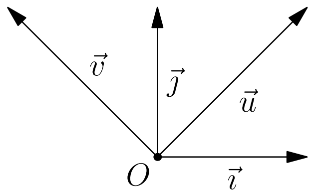
Exercice 1. $A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 21 \end{pmatrix}$, $A^t\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$, $A\cdot B$ impossible, $A\cdot B^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B\cdot A^t = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\cdot A$ impossible.

Exercice 2.

1. L'inverse d'une matrice carrée A est l'unique matrice carrée A^{-1}, de même dimension que A, telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (où I désigne la matrice identité). Ici, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. $f(0) = c = -1$, $f(-1) = a - b + c = -3$, $f(1) = a + b + c = 3$. Donc
$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad\quad\; c = -1, \\ a - b + c = -3, \\ a + b + c = 3. \end{cases}$$
4. Posons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors le système précédent s'écrit $AX = B$. Donc $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

1. La figure est la suivante.



2. Le point B a pour coordonnées $\begin{pmatrix} z-t \\ z+t \end{pmatrix}$. Il faut multiplier $\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ par la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que P est formée des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ écrites en colonne.
3. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.
4. Le vecteur $\vec{\imath}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ dans le repère $(\vec{u}, \vec{v})$. On remarque que P^{-1} est formée des coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans le repère $(\vec{u}, \vec{v})$ écrites en colonne.
5. Le point A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(-x+y) \end{pmatrix}$. Il faut multiplier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par la matrice P^{-1}.

Exercice 4.

1. $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $SP = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   On doit multiplier par $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ pour obtenir la figure (α peut prendre n'importe quelle valeur).

3. La multiplication R_zP donne les coordonnées des sommets du cube après une rotation de d'axe $(0z)$ et d'angle θ.

4. On doit multiplier par $R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Exercice 5. 1. $I \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

2. $\sqrt{2}$
3. $(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE}) = 0$, $(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HI}) = 1/2$.
4. $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6. 1. $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $M^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3.
4. $MM^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les entrées sur la diagonale sont le nombre de personne influencées par le membre correspondant.