Courbes paramétrées, Courbes polaires

Exercice 1 (Une courbe paramétrée)**.** On considère la courbe paramétrée suivante

$$\begin{aligned}\gamma : [0,\pi] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto (x(t),y(t)) = (2\cos(t), 3\sin(t)).\end{aligned}$$

1. En évaluant $\gamma(t)$ pour un certain nombre de valeurs de t bien choisies, effectuer un dessin préliminaire de la courbe paramétrée par γ.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto 9x(t)^2 + 4y(t)^2$ est constante.
3. Quelle courbe est représentée par γ ?

Exercice 2 (Folium)**.** On considère la courbe paramétrée définie par les équations

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t), \\ y(t) = \sin(3t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe, montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $t \in [-\pi, \pi]$, puis à $t \in [0, \pi]$.
2. Exprimer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la courbe a une symétrie supplémentaire et qu'on peut restreindre le domaine d'étude à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Construire le tableau de variations des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On indiquera les valeurs de x, x', y et y' pour les valeurs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.
4. Dessiner la courbe en commençant par la partie correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis en utilisant les symétries pour obtenir l'ensemble de la courbe.

Exercice 3 (Astroïde)**.** On considère la courbe paramétrée définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t), \\ y(t) = \sin^3(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe, réduire le domaine d'étude à un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Construire le tableau de variations pour x et y.
3. Donner les coordonnées des points de la courbe quand $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π et donner la pente des tangentes en ces points.
4. Dessiner la courbe.
5. Calculer la longueur et la courbure de l'astroïde.

Exercice 4 (Branches infinies)**.** On considère la courbe paramétrique définie par les équations suivantes.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t(t-1)}, \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Exprimer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Déterminer une symétrie de la courbe et en déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à $I = (-1, 1) \setminus \{0\}$.
2. Construire le tableau de variations sur I.
3. Étudier les branches infinies de la courbe sur I.
4. Dessiner la courbe.

Exercice 5. On considère la courbe polaire définie par

$$\rho(\theta) = \sin(3\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Quelle est la période de ρ ? Quelle propriété graphique en déduire pour la courbe ?
2. Exprimer $\rho(-\theta)$ et $\rho(\pi - \theta)$ en fonction de $\rho(\theta)$. Quelles sont les symétries de la courbe ? Montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
3. Calculer $\rho\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$ et en déduire une réduction de l'intervalle d'étude à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.
4. Construire le tableau de variations sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ en précisant la pente (relative) des tangentes en 0 et $\frac{\pi}{6}$.
5. Dessiner la courbe.

Exercice 6. Étudier les courbes polaires définies pour $\theta \in \mathbb{R}$ par

$$(1)\ \rho(\theta) = \cos(\theta) + 2, \qquad (2)\ \rho(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right), \qquad (3)\ \rho(\theta) = 1 + \sin(3\theta).$$