TOULOUSE iut Midi-Pyrénées Génie Mécanique et Productique Techniques Aerospatiales UNIVERSITÉ TOULOUSE III

Courbes paramétrées, Courbes polaires

Exercice 1 (Une courbe paramétrée)**.** On considère la courbe paramétrée suivante

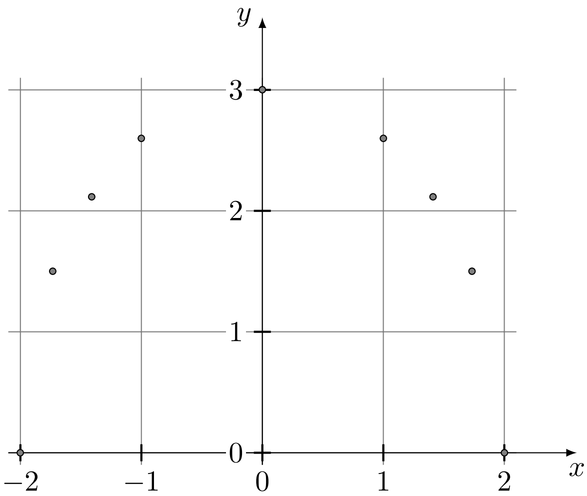
$$\begin{aligned}\gamma : [0,\pi] &\to \mathbb{R}^2\\ t &\mapsto (x(t), y(t)) = (2\cos(t), 3\sin(t)).\end{aligned}$$

1. En évaluant $\gamma(t)$ pour un certain nombre de valeurs de t bien choisies, effectuer un dessin préliminaire de la courbe paramétrée par γ.

Solution: La courbe décrite par γ étant construite à partir des fonctions cos et sin, on peut utiliser les valeurs remarquables de ces deux fonctions pour construire un certain nombre de points de la courbe. Les valeurs choisies sont résumées dans le tableau suivant.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$x(t)$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2
$y(t)$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0

On peut alors obtenir la figure suivante, sur laquelle on devine une courbe qui pourrait être par exemple une parabole ou une demi-ellipse.



2. Montrer que la fonction $t \mapsto 9x(t)^2 + 4y(t)^2$ est constante.

Solution: D'après le théorème de Pythagore, $\cos^2(t) + sin^2(t) = 1$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'égalité

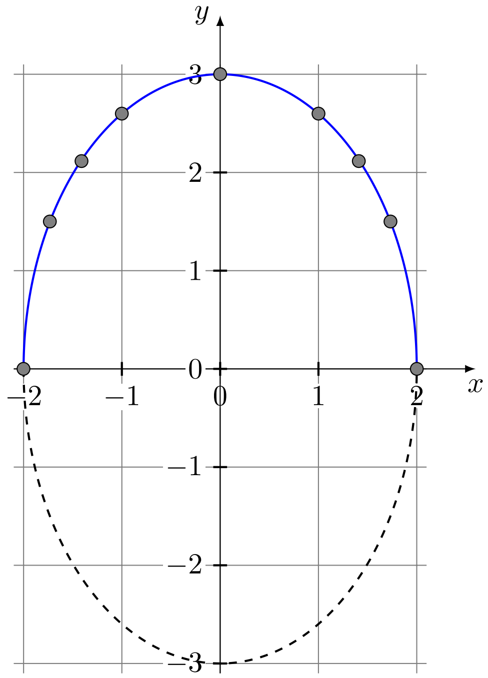
$$9x^2(t) + 4y^2(t) = 36\cos^2(t) + 36\sin^2(t) = 36.$$

3. Quelle courbe est représentée par γ ?

Solution: On reconnait dans l'équation

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

l'équation d'une ellipse centrée à l'origine. D'après la réponse à la question précédente, $(x(t), y(t))$ vivent pour tout $t \in [0, \pi]$ sur cette ellipse. Cependant, puisque $t \in [0, \pi]$, l'intégralité de l'ellipse n'est pas parcourue. A $t = 0$, on part du point de coordonnées $(2, 0)$ sur l'ellipse, pour remonter ensuite vers la partie supérieur du plan et parcourir la demi-ellipse en arrivant au point de coordonnées $(-2, 0)$. La partie inférieur de l'ellipse ne fait pas partie de la courbe (elle en ferait partie si on avait pris t dans l'intervalle $[0, 2\pi]$). La courbe γ est représentée en bleu dans la figure suivante.



Exercice 2 (Folium)**.** On considère la courbe paramétrée définie par les équations

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t), \\ y(t) = \sin(3t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe, montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $t \in [-\pi, \pi]$, puis à $t \in [0, \pi]$.

Solution: Commencons par rappeler que la fonction sin est périodique de période 2π. La fonction x est donc périodique de période $T_x = \frac{2\pi}{2} = \pi$ et la fonction y est également périodique, de période $T_y = \frac{2\pi}{3}$. Le rapport entre ces deux périodes est

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} = \frac{2}{3}.$$

C'est un nombre rationnel, il existe donc une période commune T entre x et y qui est donnée par

$$T = 3T_y = 2T_x = 2\pi.$$

On peut donc se réduire à l'étude de la courbe sur un domaine de longueur 2π, comme par exemple $[-\pi, \pi]$.
Étudions maintenant la parité de la courbe. La fonction sin est impaire et on a donc

$$x(-t) = -x(t), \quad y(-t) = -y(t).$$

Par conséquent, la courbe pour les $t < 0$ s'obtient par symétrie centrale de la courbe pour les $t > 0$ et réciproquement. On peut donc se restreindre à la partie positive de l'intervalle d'étude précédement selectionné, c'est à dire se restreindre à $[0, \pi]$.

2. Exprimer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la courbe a une symétrie supplémentaire et qu'on peut restreindre le domain d'étude à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

> **Solution:** On a
>
> $$x(\pi - t) = \sin(2(\pi - t)) = \sin(2\pi - 2t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -x(t),$$
> $$y(\pi - t) = \sin(3(\pi - t)) = \sin(3\pi - 3t) = \sin(\pi - 3t) = \sin(3t) = y(t).$$
>
> Par conséquent, on peut déduire la courbe pour $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ de la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par symmétrie par rapport à l'axe des ordonnnées. Ainsi, il suffit d'étudier la courbe sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

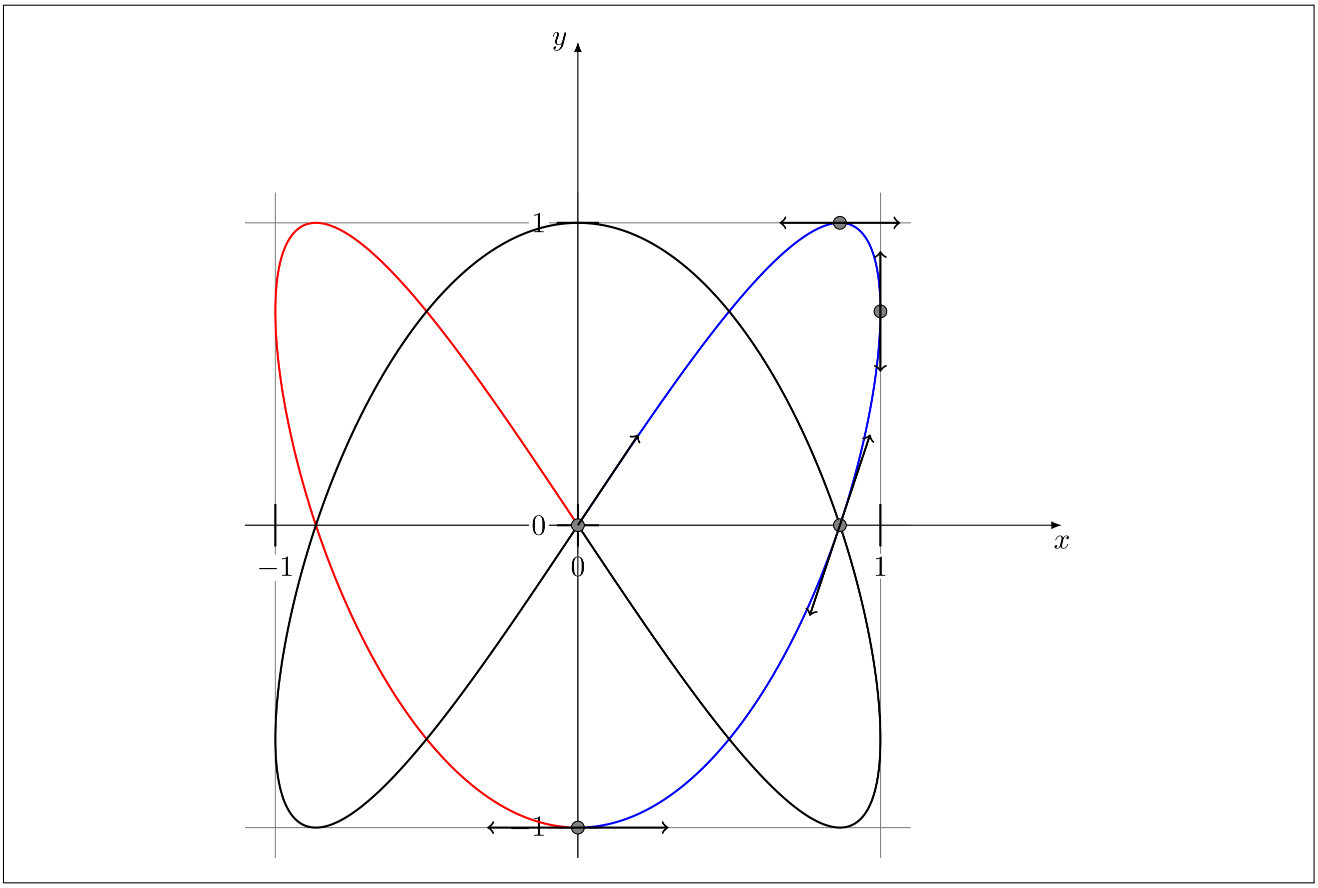
3. Construire le tableau de variation des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On indiquera les valeurs de x, x', y et y' pour les valeurs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{/}4$ et $\frac{\pi}{3}$.

> **Solution:** Les dérivées de x et y sont
>
> $$x'(t) = 2\cos(2t), \quad y'(t) = 3\cos(3t).$$
>
> Le tableau de variation de la courbe est donc le suivant.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	2	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	3	$+$	0	$-$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	-3	$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	$\frac{3}{2}$		0		$-\infty$		3		0

4. Dessiner la courbe en commencant par la partie correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis en utilisant les symétries pour obtenir l'ensemble de la courbe.

> **Solution:** En combinant les informations obtenues, on a la figure suivante. La partie bleue est la courbe obtenue pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La partie rouge s'obtient par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et la partie noire par symétrie centrale.



Exercise 1 (Astroïde)**.** On considère la courbe paramétrée définie par les équations suivantes

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t), \\ y(t) = \sin^3(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. En utilisant les propriétés de symétrie de la courve, réduire le domain d'étude à un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. Constuire le tableau de variation pour x et y.

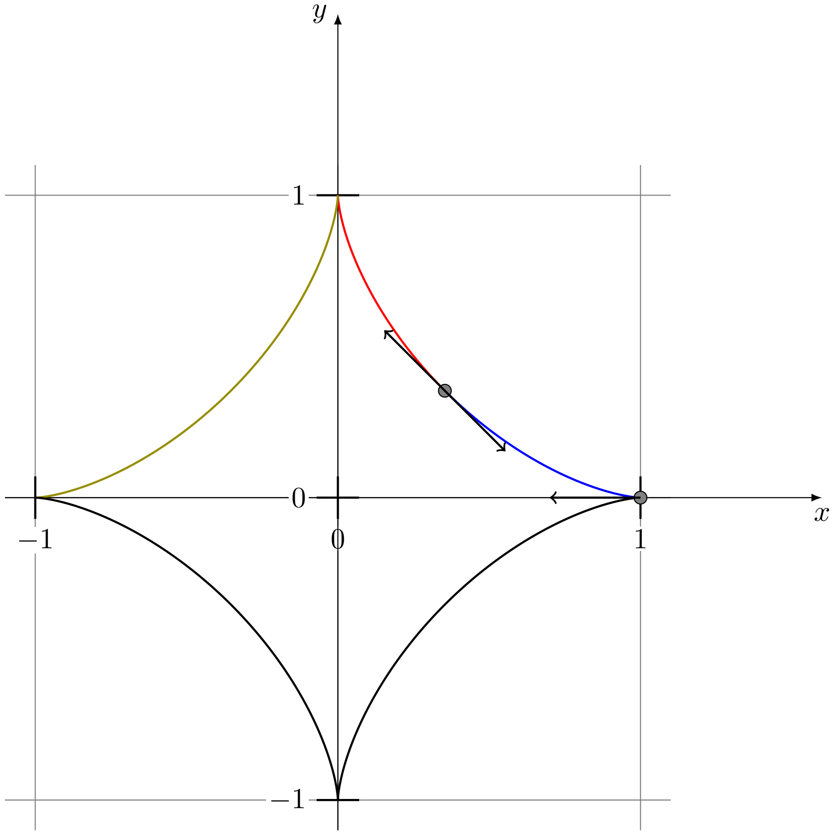
Solution:

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	0		-1

3. Donner les coordonnées des points de la courbe quand $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π et donner la pente des tangentes en ces points

4. Dessiner la courbe.

Solution: En combinant les informations obtenues, on a la figure suivante



5. Calculer la longueur et la courbue de l'astroïde.

Exercise 2 (Branches infinies)**.** On considère la courbe paramétrique définie par les équations suivantes.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t(t-1)}, \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t}, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Exprimer $x\left(\frac{1}{t}\right)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Déterminer une symétrie de la courbe et en déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à $I = (-1, 1) \setminus \{0\}$.

2. Construire le tableau de variation sur I.

Solution: On a

$$x'(t) = \frac{-2t+1}{t^2(t-1)^2}, \quad y'(t) = -\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}.$$

Par conséquent, le tableau de variation est le suivant.

t	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$x'(t)$	$\frac{3}{4}$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$x(t)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \;\Vert$
$y'(t)$	$-\frac{3}{4}$	$-$	$\Vert$	$+$	3	$+$	$\Vert$
$y(t)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$0 \;\Vert\; 0$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert$
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	-1		$\Vert$		$\pm\infty$		$\Vert$

3. Étudier les branches infinies de la courbe sur I.

Solution: On a une branche infinie lorsqu'il existe t_0 tel que

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty.$$

Cette situation se produit en $t = 0$ et $t = 1$. En $t = 0$, on a

$$\lim_{t\to 0, t<0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0, t>0} x(t) = -\infty,$$

et dans tous les cas

$$\lim_{t\to 0} y(t) = 0.$$

L'axe des abscisses est donc une asymptote à la courbe, à gauche et à droite. En $t = 1$, on a

$$\lim_{t\to 1, t<1} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to 1, t<1} y(t) = +\infty.$$

La courbe admet donc potentiellement une asymptote oblique. Pour le vérifier, calculons

$$\lim_{t\to 1, t<1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1, t<1} (-t^3) = -1.$$

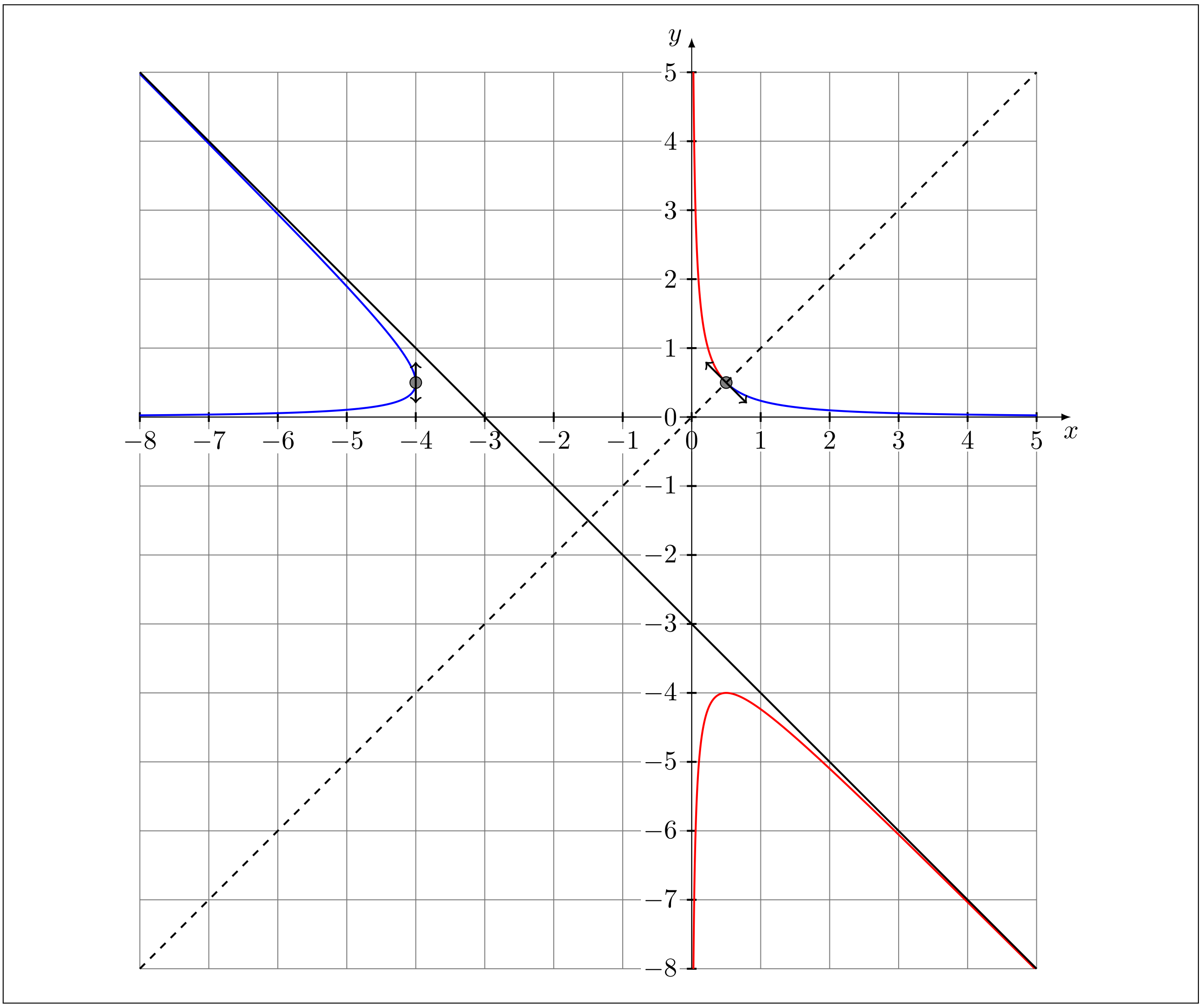
La courbe admet donc bien une asymptote oblique, de pente -1. Calculons l'ordonnée à l'origine :

$$\lim_{t\to 1, t<1} (y(t) - (-1)x(t)) = \lim_{t\to 1} \left(-\frac{t^2+t+1}{t}\right) = -3.$$

La droite d'équation $y = -x - 3$ est donc asymptote à la courbe.

4. Dessiner la courbe.

Solution: En combinant les informations obtenues, on a la figure suivante. La partie bleue correspond à $t \in I$. La partie rouge correspond à $t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ et est obtenue à partir de la partie bleue par symétrie par rapport à la droite $y = x$ (en pointillé). L'asymptote d'équation $y = -x - 3$ est également représentée sur le dessin, ainsi que les tangentes en $t = -1$ et $t = \frac{1}{2}$.



Exercice 3. On considère la courbe polaire définie par

$$\rho(\theta) = \sin(3\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Quelle est la période de ρ ? Quelle propriété graphique en déduire pour la courbe ?

> **Solution:** La fonction sin est périodique de période 2π, donc ρ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$. On en déduit que la courbe est invariante par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Par conséquentn, pour obtenir la courbe, on commencera par tracer la courbe pour θ dans un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$ puis on effectuera 2 rotations successives d'angle $\frac{2\pi}{3}$ du motif obtenu pour avoir l'ensemble de la courbe.

2. Exprimer $\rho(-\theta)$ et $\rho(\pi-\theta)$ en fonction de $\rho(\theta)$. Quelles sont les symétries de la courbe ? Montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

> **Solution:** On a
> $$\rho(-\theta) = \sin(-3\theta) = -\sin(3\theta) = -\rho(\theta).$$
> La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Par périodicité, on pouvait réduire le domaine d'étude à $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Par parité, on peut maintenant réduire le domaine d'étude à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
> On a
> $$\rho(\pi-\theta) = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin(\pi - 3\theta) = \sin(3\theta) = \rho(\theta).$$
> La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui nous savions déjà.

3. Calculer $\rho\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ et en déduire une réduction de l'intervalle d'étude à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

Solution: On a
$$\rho\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) = \sin(\pi - 3\theta) = \sin(3\theta) = \rho(\theta).$$
La courbe est donc symétrique par rapport à la droite polaire d'équation $\theta = \frac{\pi}{3}$ et on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

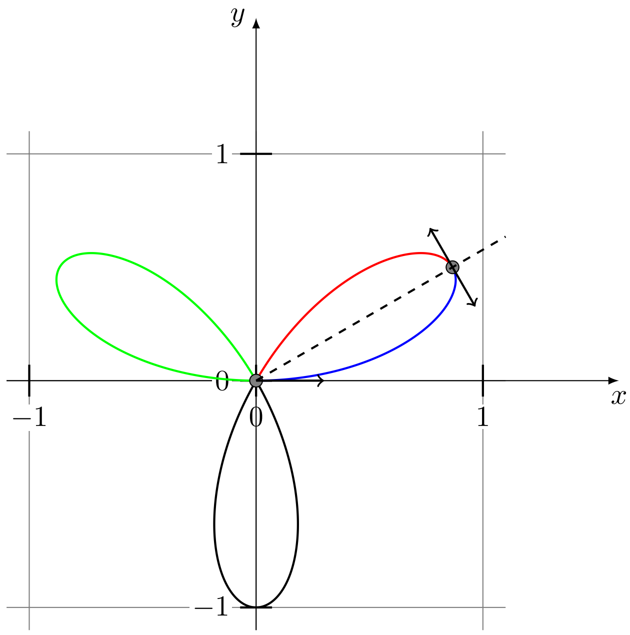
4. Construire le tableau de variation sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ en précisant la pente (relative) des tangentes en 0 et $\frac{\pi}{6}$.

Solution:

t	0		$\frac{\pi}{6}$
$\rho'(t)$	3	$+$	0
$\rho(t)$	0	$\nearrow$	1
$\frac{\rho(t)}{\rho'(t)}$	0		$+\infty$

5. Dessiner la courbe.

Solution:



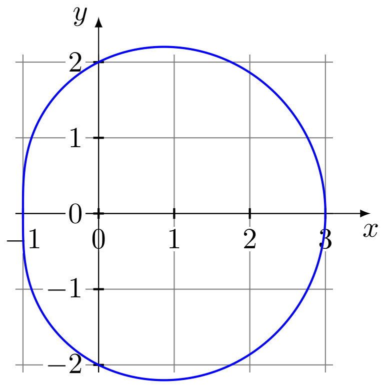
Exercice 4. Étudier les courbes polaires définies pour $\theta \in \mathbb{R}$ par
$$(1)\ \rho(\theta) = \cos(\theta) + 2, \quad (2)\ \rho(\theta) = \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad (3)\ \rho(\theta) = 1 + \sin(3\theta).$$

Solution: La fonction ρ est périodique de période 2π, on peut donc restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. La courbe est entièrement décrite par ρ pour θ dans $[-\pi, \pi$ car l'image d'une courbe par une rotation d'angle 2π est cette même courbe. Par parité de la fonction cos, la fonction ρ est également paire et on peut donc réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. La courbe sera symmétrique par rapport à l'axe des abscisses. On a

$$\rho'(\theta) = -\sin(\theta).$$

Le tableau de variation sur $[0, \pi]$ est le suivant.

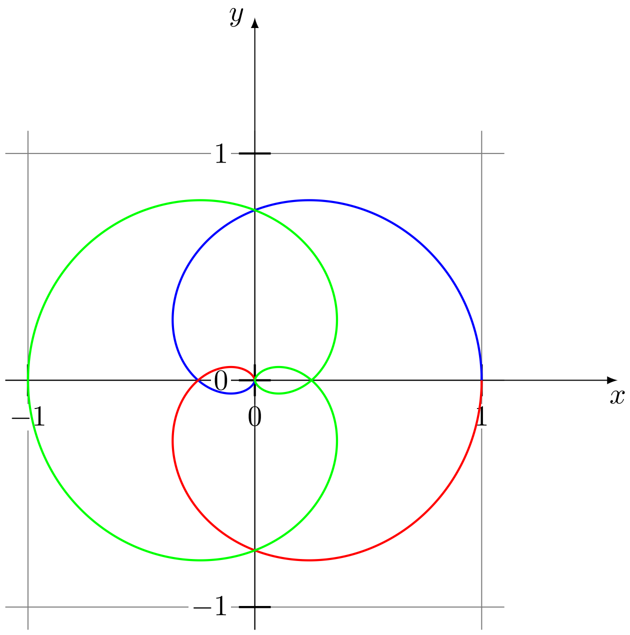
t	0		π
$\rho'(t)$	0	$-$	0
$\rho(t)$	3	$\searrow$	1
$\frac{\rho(t)}{\rho'(t)}$	$\pm\infty$		$\pm\infty$



Solution:

$$\rho'(\theta) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) = \frac{1}{3}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right).$$

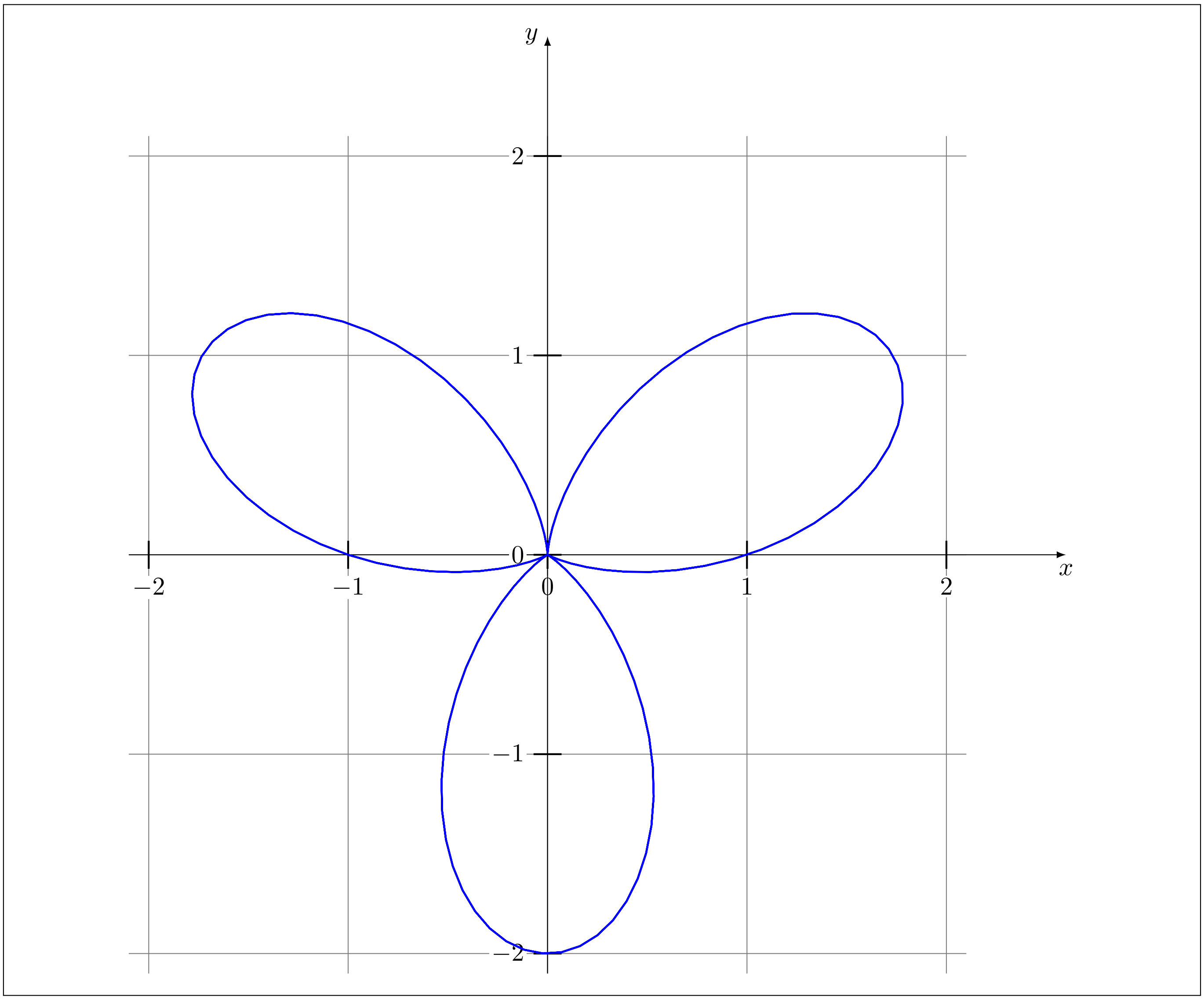
t	0		$\frac{3\pi}{2}$
$\rho'(t)$	0	$-$	0
$\rho(t)$	3	$\searrow$	1
$\frac{\rho(t)}{\rho'(t)}$	$\pm\infty$		$\pm\infty$



Solution:

$$\rho'(\theta) = 3\cos(3\theta)$$

t	0		$\frac{3\pi}{2}$
$\rho'(t)$	0	$-$	0
$\rho(t)$	3		1
$\frac{\rho(t)}{\rho'(t)}$	$\pm\infty$		$\pm\infty$



y
2
1
0
-1
-2
x
-2
-1
0
1
2