Mathématiques - Correction

durée : 2h

Exercice 1 (Questions de cours, 3 points)**.**

1) La famille $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est *liée*.
2) Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$ et φ une application de E dans F. On dit que φ est *linéaire* si pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans E et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{u}+\vec{v}) &= \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}), \\ \varphi(\lambda\vec{u}) &= \lambda\varphi(\vec{u}). \end{aligned}$$

.

3) Soit M une matrice carrée de taille n. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de M s'il existe un vecteur $V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que
$$MV = \lambda V.$$
Le vecteur V est appelé *vecteur propre* de M..

Exercice 2 (Déterminants, 4 points)**.**

$$(a)\ \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (c)\ \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = \begin{cases} x^3 - 3xa^2 + 2a^3, \\ (x-a)^2(x+2a). \end{cases}$$

Exercice 3 (Symétrie, 7 points)**.** On se place dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs $\vec{u} = \binom{1}{1}$ et $\vec{v} = \binom{-1}{1}$. Soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale d'axe dirigé par $\vec{u}$.

1) La matrice formée par les coordonnées de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ vérifie $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
2) On a $s(\vec{u}) = \vec{u}$ et $s(\vec{v}) = -\vec{v}$, donc la matrice Δ de s dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3) La matrice de changement de base P de la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ à la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est donnée par les coordonnées de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ dans $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ en colonne, donc $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4) $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
5) $M = P\Delta P^{-1}$.
6) $s(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}$ et $s(\vec{\jmath}) = \vec{\imath}$.
7) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Systèmes, 7 points)**.** On considère le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \tag{S}$$

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\det(A) = 1 \neq 0$ donc A est inversible.

3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5) a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y + 3z = 5 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$

b) $x = y = z = 1$.