Fonctions de plusieurs variables

1 Fonctions de plusieurs variables

1.1 Dérivées partielles, surfaces

Exercice 1.1. 1. Pour la fonction f donnée par $f(x,y) = x^2y^2 + \sin(2xy)$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. Pour la fonction u donnée par $u(x,y,z) = x^4y^3z^5$, calculer $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}$.
3. Vérifier que la fonction g définie par

$$g(x,y) = x^3y + 4x^2y^2 - y^4$$

satisfait l'équation

$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 1.2. On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 1.3. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de trois variables. On définit une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y,z) = g(x-y, y-z, z-x).$$

Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Exercice 1.4. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + \cos(y).$$

On note $\mathcal{S}$ la surface représentative de f.

1. Déterminer l'équation de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. On considère l'ensemble $P_1 \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$x = 0.$$

   (a) Décrire P_1 en terme géométrique (i.e. dire s'il s'agit d'une droite, d'un cercle, etc.).
   (b) Effectuer une représentation graphique de P_1.
3. On considère l'ensemble $P_2 \subset \mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$z = -\frac{1}{2}.$$

(a) Décrire P_2 en terme géométrique (i.e. dire s'il s'agit d'une droite, d'un cercle, etc.).
(b) Effectuer une représentation graphique de P_2.

4. Décrire en terme géométrique l'intersection $D = P_1 \cap P_2$.
5. Décrire analytiquement l'ensemble $I = D \cap \mathcal{S}$ (i.e. donner les valeurs des points (x, y, z) de I).
6. Calculer le gradient de f en chacun des points de I.
7. Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en chacun des points de I.

Exercice 1.5. Soit S la surface déterminée par l'équation

$$2xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 5$$

1. Montrer que le point $(1, 1, 1)$ appartient bien à la surface S.
2. Déterminer l'équation du plan tangent à S en $(1, 1, 1)$.

2 TD 2

Exercice 2.1. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer les dérivées premières et secondes, puis appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au point (x_0, y_0) donné.

1. $f(x, y) = 2x^2 + 3\cos(xy)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
2. $g(x, y) = e^{xy} + (x + y)^3$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
3. $h(x, y) = \arctan(x^2 + y)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exercice 2.2. Soit g la fonction définie par

$$g(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1.$$

1. Déterminer la position des extrema locaux de g.
2. Préciser leur nature.
3. En déduire un dessin approximatif de la surface.

Exercice 2.3. Soit S la surface représentative de la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy.$$

1. Déterminer les points critiques de f (indications : il y en a 3).
2. Déterminer la nature de ces points critiques.
3. En déduire un dessin approximatif de la surface.

Exercice 2.4 (Méthodes des moindres carrés)**.** On considère trois points du plan $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ et une droite d'équation $y = ax + b$.

1. On suppose que les points M_1, M_2 et M_3 ont les coordonnées données dans le tableau suivant

i	x_i	y_i
1	0	2
2	1	4
3	2	1

et que la droite a pour équation $y = x + 1$. Représenter M_1, M_2 et M_3 sur un dessin. Calculer pour chaque point la valeur de

$$y_i - (ax_i + b).$$

Préciser sur le dessin ce que représente cette valeur.

2.1 Calcul d'incertitude, intégrales doubles et triples

Exercice 2.5. On rappelle que la période des oscillations d'un pendule simple de longueur l est donnée par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

où g désigne la constante gravitationnelle.

1. On suppose dans cette question que la valeur de π de notre calculatrice est exacte. Calculer l'incertitude sur la période du pendule lorsqu'on considère $l = 1\,m$ à 10^{-3} près et $g = 9,81\,m/s^2$ à 10^{-2} près.
2. On suppose maintenant que la valeur exacte de π n'est pas connue et que $\pi = 3.141$ à 10^{-3} près. Calculer l'incertitude sur la période du pendule en reprenant les mêmes valeurs que précédement.