Mathématiques TD Semestre 3

Exercice 1 (Calcul matriciel)**.** Effectuer, lorsqu'elles sont possibles, les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix}1&3\\-3&4\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\4&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3&2\\1&-3&4\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad 4\cdot\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&3&2\\1&-3&4\\1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&3\\-3&4\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&-1\\1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\-3&4\\1&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Calcul matriciel)**.** On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}-1&2&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&4&-1\end{pmatrix}$. Effectuer, lorsqu'ils sont possibles, les produits suivants :

$$A\cdot A^t,\quad A^t\cdot A,\quad A\cdot B,\quad A\cdot B^t,\quad B\cdot A^t,\quad B\cdot A.$$

Exercice 3 (Systèmes)**.** On considère les systèmes suivants :

$$\begin{cases}y_1=x_1-2x_2+2x_3,\\y_2=-2x_1+x_2+x_3,\\y_3=3x_1-x_2-2x_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}z_1=2y_1-y_2-y_3,\\z_2=3y_1+y_2-2y_3.\end{cases}$$

(1) Exprimer ces systèmes sous forme matricielle, c'est à dire trouver les matrices A et B telles que pour $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ et $Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$, on a $Y=AX$ et $Z=BY$.
(2) En déduire l'expression de z_1 et z_2 en fonction de x_1, x_2 et x_3.

Exercice 4 (Inversion de matrices)**.** Calculer les inverses de $A=\begin{pmatrix}4&3\\-1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-1&2&-1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

Exercice 5 (Résolution de système)**.** On considère le système $\begin{cases}x-2y-2z=1,\\-x+2y-z=0,\\x+y+4z=0.\end{cases}$

(1) Écrire ce système sous forme matricielle $AX=B$.
(2) Trouver l'inverse de A.
(3) En déduire la solution du système.

Exercice 6 (Déterminants)**.** Calculer les déterminants des matrices

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 7 (Déterminants)**.** Utiliser des opérations sur les lignes et les colonnes pour calculer les déterminants suivants en effectuant un minimum d'opérations.

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}\frac13&\frac13-\frac{1}{\sqrt3}&\frac13+\frac{1}{\sqrt3}\\\frac13+\frac{1}{\sqrt3}&\frac13&\frac13-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac13-\frac{1}{\sqrt3}&\frac13+\frac{1}{\sqrt3}&\frac13\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}a&1&3a+2\\b&2&3b+4\\c&3&3c+6\end{vmatrix}.$$

Exercice 8 (Dépendance et indépendance linéaire)**.** Soient $U_1 = (1,2)$, $U_2 = (-1,1)$ et $U_3 = (2,3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Utiliser les définitions du cours pour montrer que

(a) le système $S = (U_1, U_2)$ est libre,
(b) le système $S' = (U_1, U_2, U_3)$ est générateur de $\mathbb{R}^2$,
(c) le système $S' = (U_1, U_2, U_3)$ est lié.

Exercice 9 (Représentation matricielle)**.** On considère une machine à outil constituée d'un bras télescopique muni d'une pince. Le bras est modélisé par une tige pouvant pivoter autour d'un point que nous noterons O. Le point O est l'origine d'un repère orthonormé direct (O, x, y, z) auquel est associé la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette machine effectue trois opérations sucessivement :

- Étape 1 : elle attrape avec sa pince en jouant sur la longueur variable du bras des objets qui peuvent être au sol (identifié au plan (xOy)) ou suspendus, puis elle réduit de moitié la longueur de son bras,
- Étape 2 : elle effectue une rotation d'angle π autour de l'axe (Oz),
- Étape 3 : elle desserre sa pince pour lâcher l'objet qui tombe au sol.

(1) Déterminer la matrice M_1 associée à l'étape 1.
(2) Déterminer la matrice M_2 associée à l'étape 2.
(3) Déterminer la matrice M_3 associée à l'étape 3.
(4) En déduire par calcul matriciel la matrice notée M associée à l'ensemble des étapes 1 à 3.
(5) On place un objet au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sous l'action de la machine, où se retrouve l'objet ?

Exercice 10 (Application linéaire)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\} = \left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ et l'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_1+2x_2}{2x_1+4x_2}$.

(1) Vérifier que g est une application linéaire.
(2) Écrire la matrice A représentant g dans la base B_0.
(3) Soient $\vec{u} = \binom{2}{-1}$ et $\vec{v} = \binom{1}{2}$. Montrer que $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Écrire la matrice Δ représentant g dans la base B_1.
(4) Donner P la matrice de changement de base de B_0 vers B_1, et calculer les produits $P\Delta$ et AP.
(5) Calculer l'inverse de P et en déduire la relation liant les deux représentations A et Δ de g.

Exercice 11 (Projection)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ et du produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$, on considère le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$ et $p_{\vec{u}}$ la projection orthogonale sur la direction de $\vec{u}$, définie par $p_{\vec{u}}(\vec{v}) = (\vec{u}|\vec{v})\,\vec{u}$.

(1) Vérifier que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire (i.e. $\|\vec{u}\| = 1$) et montrer que $p_{\vec{u}}$ est une application linéaire.
(2) Déterminer la matrice M représentant l'application $p_{\vec{u}}$ dans la base B_0.
(3) Calculer $M^2 = M \cdot M$ et l'image du vecteur $\vec{w} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ par la projection $p_{\vec{u}}$.
(4) Déterminer géometriquement le noyau et l'image de $p_{\vec{u}}$.

Exercice 12 (Rotation)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ et du produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$, on considère le vecteur $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$ et $r_{\vec{w}}$ la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ autour de l'axe orienté $(O, \vec{w})$. On définit un ensemble de vecteurs $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k})$.

(1) Vérifier que B_1 est une base orthonormée (directe) de $\mathbb{R}^3$ (indication : on pourra vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux et effectuer le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$).
(2) Déterminer la matrice R_1 représentant $r_{\vec{w}}$ dans la base B_1.
(3) Soit Q la matrice de changement de base de B_0 vers B_1. Écrire la matrice de passage Q et vérifier que $QQ^t = I$. En déduire Q^{-1}.
(4) On note R_0 la matrice de $r_{\vec{w}}$ dans la base B_0. Exprimer R_0 en fonction de Q et R_1 puis calculer R_0.
(5) Calculer matriciellement l'image du vecteur $\vec{\imath}$ par la rotation $r_{\vec{w}}$.

Exercice 13 (Diagonalisation)**.** (1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Diagonaliser les matrices B et C.