Corrections
Mathématiques
TD Semestre 3

Calcul matriciel

Exercice 1.
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ impossible,
$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 19 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, impossible

Exercice 2. $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 21 \end{pmatrix}$, $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 8 \\ -4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$, $A \cdot B$ impossible, $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A^t = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A$ impossible.

Exercice 3. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
(2) On a $Z = BY = B \cdot AX$ et $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -5 & -3 & 11 \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} z_1 = x_1 - 4x_2 + 5x_3, \\ z_2 = -5x_1 - 3x_2 + 11x_3. \end{cases}$

Inversion de matrices

Exercice 4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (1) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le systeme s'écrit alors $AX = B$. (2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

(3) La solution du système est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.

Déterminants

Exercice 6. $\det(A) = \frac{5}{4}$, $\det(B) = -2$, $\det(C) = 4$.

Exercice 7. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (deux lignes identiques),

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (permutation des deux premières colonnes puis produits des termes sur la diagonale),

$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = ,$ $\qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix} = 0$ $(C_3 = 3C_1 + 2C_2)$.

Dépendance et Indépendance linéaire - Bases

Exercice 8. Soient $U_1 = (1,2)$, $U_2 = (-1,1)$, $U_3 = (2,3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que si $aU_1 + bU_2 = 0$, alors $a = b = 0$. Supposons donc que $aU_1 + bU_2 = 0$. Alors (a, b) vérifie le système

$$\begin{cases} a - b = 0, \\ 2a + b = 0, \end{cases}$$

et il est facile de voir que la seule solution de ce système est $a = b = 0$. Donc (U_1, U_2) est libre.

(b) Il faut vérifier que pour tout $X = (x, y)$ vecteur de $\mathbb{R}^2$ il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $X = aU_1 + bU_2 + cU_3$. Soit donc $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $X = aU_1 + bU_2 + cU_3$. Cela veut dire que a, b, c vérifient le système

$$\begin{cases} x = a - b + 2c, \\ y = 2a + b + 3c. \end{cases}$$

Notons qu'ici les inconnues sont a, b, c et que x et y ne sont que des paramètres du système. Il y a deux équations et trois inconnues, le système est donc sous-déterminé et il y aura sans doute de multiples solutions. En tatonnant un peu, on trouve par exemple que

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}(x + y), \\ b = -\frac{1}{3}(2x - y), \\ c = 0 \end{cases}$$

est solution du système. On a bien trouvé $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $X = aU_1 + bU_2 + cU_3$ et on peut conclure que le système $S' = (U_1, U_2, U_3)$ est générateur de $\mathbb{R}^2$,

(c) Le fait qu'il n'y ait pas unicité du choix de a, b, c dans la réponse à la question précédente nous indique déjà que le système $S' = (U_1, U_2, U_3)$ est lié. Prouvons le en utilisant la définition. Il faut montrer que le système n'est pas libre, c'est à dire montrer qu'il existe a, b, c des réels non tous nuls tels que $aU_1 + bU_2 + cU_3 = 0$. Cela signifie que a, b, c vérifient le système

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0, \\ 2a + b + 3c = 0. \end{cases}$$

En tatonnant un peu on peut trouver facilement une solution du système, par exemple

$$a = -5, \quad b = 1, \quad c = 3,$$

et on en conclut que le système est lié.

Représentation matricielle

Exercice 9. On considère une machine à outil constituée d'un bras télescopique muni d'une pince. Le bras est modélisé par une tige pouvant pivoter autour d'un point que nous noterons O. Le point O est l'origine d'un repère orthonormé direct (O,x,y,z) auquel est associé la base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette machine effectue trois opérations sucessivement :

- Étape 1- elle attrape avec sa pince en jouant sur la longueur variable du bras des objets qui peuvent être au sol (identifié au plan (xOy)) ou suspendus, puis elle réduit de moitié la longueur de son bras,
- Étape 2- elle effectue une rotation d'angle π autour de l'axe (Oz),
- Étape 3- elle desserre sa pince pour lâcher l'objet qui tombe au sol.

(1) $M_1=\begin{pmatrix}\frac12 & 0 & 0\\ 0 & \frac12 & 0\\ 0 & 0 & \frac12\end{pmatrix}$.

(2) $M_2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(3) $M_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(4) $M=M_3\cdot M_2\cdot M_1=M_2=\begin{pmatrix}-\frac12 & 0 & 0\\ 0 & -\frac12 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(5) Il se trouve au point de coordonnées $M\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac12\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B_0=\{\vec{\imath},\vec{\jmath}\}=\left\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right\}$ et l'application linéaire $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $g\binom{x_1}{x_2}=\binom{x_1+2x_2}{2x_1+4x_2}$.

(1) Pour vérifier que g est linéaire, on applique la définition donnée en cours : soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $U=\binom{u_1}{u_2}$, $V=\binom{v_1}{v_2}$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$g(\lambda U)=\begin{pmatrix}\lambda u_1+2\lambda u_2\\ 2\lambda u_1+4\lambda u_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}u_1+2u_2\\ 2u_1+4u_2\end{pmatrix}=\lambda g(U),$$
$$g(U+V)=\begin{pmatrix}(u_1+v_1)+2(u_2+v_2)\\ 2(u_1+v_1)+4(u_2+v_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+2u_2\\ 2u_1+4u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1+2v_2\\ 2v_1+4v_2\end{pmatrix}=g(U)+g(V).$$

Donc g est linéaire.

(2) La matrice A est formée des coordonnées des images des vecteurs de la base B_0 dans la base B_0. On a

$$g(\vec{\imath})=g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath},$$
$$g(\vec{\jmath})=g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\vec{\imath}+4\vec{\jmath},$$

Donc $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.

(3) On peut utiliser la définition, mais il est plus rapide de calculer le déterminant de la matrice formée en écrivant en colonne les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On trouve

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0,$$

donc $B_1=\{\vec{u},\vec{v}\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

(3) La matrice Δ est formée des coordonnées des images des vecteurs de la base B_1 dans la base B_1. Attention à ne pas se tromper : il ne faut pas utiliser les coordonnées des vecteurs dans B_0. On a

$$g(\vec{u}) = g\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{u} + 0\vec{v},$$
$$g(\vec{v}) = g\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 0\vec{u} + 5\vec{v},$$

Donc les coordonnées de $g(\vec{u})$ et $g(\vec{v})$ *dans la base* B_1 sont respectivement $\binom{0}{0}$ et $\binom{0}{5}$. Donc $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(4) Par définition, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $P\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = AP$.

(5) $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = P\Delta P^{-1}$.

Exercice 11. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B_0 (rappellons que $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$, en particulier B_0 est orthonormée directe) et du produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$. On pose $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k})$ et on note par $p_{\vec{u}}$ la projection orthogonale sur le vecteur $\vec{u}$. La projection $p_{\vec{u}}$ est donc définie par $p_{\vec{u}} = (\vec{u}|\vec{v})\,\vec{u}$ où $(\vec{u}|\vec{v})$ désigne le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(1) Par définition, le vecteur $\vec{u}$ est unitaire si $\|\vec{u}\| = 1$, où $\|\vec{u}\| := \sqrt{(\vec{u}|\vec{u})}$ désigne la norme de $\vec{u}$. On vérifie facilement que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1,$$

donc $\vec{u}$ est unitaire. Par définition, l'application $p_{\vec{u}}$ est linéaire si pour tout $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$p_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = p_{\vec{u}}(\vec{v}) + p_{\vec{u}}(\vec{w}),$$
$$p_{\vec{u}}(\lambda\vec{v}) = \lambda p_{\vec{u}}(\vec{v}).$$

Soient $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconques. On a, par linéarité du produit scalaire vis à vis de chacune des variables,

$$p_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}|\vec{v} + \vec{w})\,\vec{u} = (\vec{u}|\vec{v})\,\vec{u} + (\vec{u}|\vec{w})\,\vec{u} = p_{\vec{u}}(\vec{v}) + p_{\vec{u}}(\vec{w}),$$
$$p_{\vec{u}}(\lambda\vec{v}) = (\vec{u}|\lambda\vec{v})\,\vec{u} = \lambda\,(\vec{u}|\vec{v})\,\vec{u} = \lambda p_{\vec{u}}(\vec{v}).$$

Donc l'application $p_{\vec{u}}$ est linéaire.

(2) Par définition, la matrice M de $p_{\vec{u}}$ dans la base B_0 est la matrice formée par les coordonnées (en colonne) dans la base B_0 des images par $p_{\vec{u}}$ des vecteurs de la base B_0. On voit facilement que

$$p_{\vec{u}}(\vec{\imath}) = \frac{1}{3}(\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}),$$
$$p_{\vec{u}}(\vec{\jmath}) = -\frac{1}{3}(\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}),$$
$$p_{\vec{u}}(\vec{k}) = \frac{1}{3}(\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}).$$

Donc la matrice M est

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Après calcul de la multiplication matriciel $M \cdot M$, on s'apercoit que $M^2 = M$. On peut remarquer que cela est naturel si on pense que M est la matrice de la projection $p_{\vec{u}}$. En effet, M^2 sera alors la matrice

de $p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}}$. Or $p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}} = p_{\vec{u}}$ (car $p_{\vec{u}}$ est une projection), donc M^2 sera également la matrice de $p_{\vec{u}}$, donc $M^2 = M$ (la matrice d'une application linéaire dans une certaine base est unique).
Soit $\vec{w} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$. Pour calculer $p_{\vec{u}}(\vec{w})$, on peut par exemple procéder par multiplication matricielle : les coordonnées de $p_{\vec{u}}(\vec{w})$ sont données par

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $p_{\vec{u}}(\vec{w}) = \dfrac{2}{3}\vec{u}$.

(4) Par définition,

$$\begin{aligned} \ker(p_{\vec{u}}) &= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{0}\}, \\ \mathrm{Im}(p_{\vec{u}}) &= \{p_{\vec{u}}(\vec{v}),\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(p_{\vec{u}}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (\vec{u}|\vec{v}) = 0\}$ et $\mathrm{Im}(p_{\vec{u}}) = \{\lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. C'est à dire $\ker(p_{\vec{u}})$ est le plan vectoriel formé par les vecteurs perpendiculaires à $\vec{u}$ et $\mathrm{Im}(p_{\vec{u}})$ est la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$.

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ et du produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$, on considère le vecteur $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$ et $r_{\vec{w}}$ la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ autour de l'axe orienté $(O, \vec{w})$. On définit un ensemble de vecteurs $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k})$.

(1) Vérifier que B_1 est une base orthonormée (directe) de $\mathbb{R}^3$ (indication : on pourra vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux et effectuer le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$).
(2) Déterminer la matrice R_1 représentant $r_{\vec{w}}$ dans la base B_1.
(3) Soit Q la matrice de changement de base de B_0 vers B_1. Écrire la matrice de passage Q et vérifier que $QQ^t = I$. En déduire Q^{-1}.
(4) On note R_0 la matrice de $r_{\vec{w}}$ dans la base B_0. Exprimer R_0 en fonction de Q et R_1 puis calculer R_0.
(5) Calculer matriciellement l'image du vecteur $\vec{\imath}$ par la rotation $r_{\vec{w}}$.

Exercice 6. On se place encore dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et du produit scalaire usuel. On définit le vecteur $\vec{w} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$ et on note par $r_{\vec{w}}$ la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ autour de l'axe orienté $(O, \vec{w})$. On pose également $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis par $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath} - 2\vec{k})$.

(1) Montrons que la base B est orthonormée (directe).
Première méthode (avec le produit vectoriel). Commencons par remarquer que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et que

$$(\vec{u}|\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.$$

Par ailleurs, on peut facilement calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base B_0 :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$. Par définition du produit vectoriel, B est donc une base directe et $\vec{w}$ est orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Comme par ailleurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux, on en déduit immédiatement que B est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode (sans le produit vectoriel). Commencons par montrer que B est une base. On peut utiliser la définition mais il est plus rapide de calculer le déterminant de la matrice formée en écrivant en colonne les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Cela entraîne que B est une base. Pour conclure que B est orthonormée, il suffit de vérifier par le calcul que

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1,$$
$$(\vec{u}|\vec{v}) = (\vec{u}|\vec{w}) = (\vec{v}|\vec{w}) = 0.$$

(2) Par définition, la matrice R_1 de $r_{\vec{w}}$ dans la base B_1 est la matrice formée par les coordonnées (en colonne) dans la base B_1 des images par $r_{\vec{w}}$ des vecteurs de la base B_1. On voit facilement que

$$r_{\vec{w}}(\vec{u}) = \vec{v}, \qquad r_{\vec{w}}(\vec{v}) = -\vec{u}, \qquad r_{\vec{w}}(\vec{w}) = \vec{w}.$$

Ainsi, la matrice R_1 est donnée par

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Par définition, la matrice Q de passage entre la base B_0 et la base B_1 est formée des coordonnées en colonne dans la base B_0 des vecteurs de B_1. Par conséquent,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul matriciel montre que, si on désigne par I la matrice identité de taille 3, on a

$$Q.Q^t = I.$$

En conséquence, par définition de l'inverse d'une matrice, $Q^{-1} = Q^t$.

(4) Désignons par R_0 la matrice de $r_{\vec{w}}$ dans la base B_0. La relation entre R_0 et R_1 est

$$R_0 = QR_1Q^{-1}.$$

Rappelons brièvement comment mémoriser cette relation. Étant donné un vecteur $\vec{z}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées Z_{B_0} dans la base B_0 et Z_{B_1} dans la base B_1, on peut relier ces deux jeux de coordonnées à l'aide de la matrice de passage Q par la relation

$$Z_{B_0} = QZ_{B_1}.$$

On peut représenter schématiquement cette relation par le diagramme suivant, où la flêche représente la multiplication à gauche par l'élément situé au dessus d'elle.

$$(\mathbb{R}^3, B_1) \xrightarrow{Q} (\mathbb{R}^3, B_0).$$

Sachant que si Q est la matrice de passage de B_0 à B_1, alors Q^{-1} est la matrice de passage de B_1 vers B_0, on peut écrire

$$(\mathbb{R}^3, B_1) \xleftarrow{Q^{-1}} (\mathbb{R}^3, B_0).$$

Pour représenter la rotation $r_{\vec{w}}$ on a deux diagrammes selon la base dans laquelle on considère l'application.

$$(\mathbb{R}^3, B_1) \xrightarrow{R_1} (\mathbb{R}^3, B_1),$$
$$(\mathbb{R}^3, B_0) \xrightarrow{R_0} (\mathbb{R}^3, B_0).$$

En combinant ces quatre diagrammes, on obtient le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, B_0) \arrow[r, "R_0"] \arrow[d, "Q^{-1}"] & (\mathbb{R}^3, B_0) \\
(\mathbb{R}^3, B_1) \arrow[r, "R_1"] & (\mathbb{R}^3, B_1) \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

ce qui nous permet de conclure que $R_0 = QRQ^{-1}$. Après calcul, on trouve

$$R_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) Le vecteur $\vec{\imath}$ a pour coordonnées $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ dans la base B_0. Par conséquent, les coordonnées de $r_{\vec{w}}(\vec{\imath})$ dans la base B_0 sont données par la multiplication matricielle

$$R_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{3}\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Diagonalisation

Exercice 13. Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $D_1 = P_1^{-1}AP_1$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $D_2 = P_2^{-1}BP_2$.

Pour $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a $D_3 = P_3^{-1}CP_3$.