TP : Intégration numérique

Au travers de ce TP, nous travaillerons sur un concept fondamental des mathématiques appliquées qui concerne le passage du niveau "continu" au niveau "discret". Le travail autour du calcul intégral qui vous a été demandé jusqu'ici reposait sur le calcul exact d'une intégrale à l'aide de la recherche de primitives de fonctions connues explicitement en tout point ("continu"). Si on s'affranchit de la volonté d'avoir une solution exacte et qu'on s'accorde le droit d'avoir une solution approchée (avec une erreur que l'on pourra contrôler), il est possible de mettre en place des méthodes de calculs performantes basées sur la connaissance de la fonction à intégrer en un nombre fini de points ("discret"). Ce type de méthodes reste l'outil principal du calcul pratique d'intégrales.

1 Tableur : quelques rappels

Les exercices proposés dans les sections suivantes ne requièrent qu'une connaissance très limitée du fonctionnement d'un tableur. Dans cette section, on rappelle sous forme d'exercices les informations les plus importantes pour la suite. *Les étudiants familiés avec l'usage d'un tableur pourront se dispenser des exercices de cette section.*

Exercice 1 (Formules)**.** Dans un tableur, ouvrir une nouvelle feuille de calcul. Entrer dans la case A1 la valeur 4, dans la case B1 la valeur 5, puis dans les cases C1 à G1 les formules `=A1+B1`, `=A1-B1`, `=A1*B1`, `=A1/B1`, `=A1^B1`.

1. Interpréter les valeurs qui apparaissent dans les cases C1 à G1.
2. Remplacer dans la case A1 la valeur 4 par la valeur 2. Que peut-on remarquer ?

Exercice 2 (Position relative et Position absolue)**.** Dans un tableur, ouvrir une nouvelle feuille de calcul. L'ensemble de l'exercice se fera sur la même feuille de calcul.

1. Entrer dans la case A1 la valeur 1, dans la case B1 la valeur 3, puis dans la case C1 la formule `=(A1+B1)/2`. Puis entrer dans la case A2 la valeur 2 et dans la case B2 la valeur 6. Enfin effectuer un copier/coller de la case C1 vers la case C2. Interpréter la valeur qui apparaît dans la case C2.
2. Placer le pointeur de la souris sur la case C2 et observer la barre de formule. Que peut-on remarquer ?
3. Entrer dans la case D1 la formule `=($A$1+$B$1)/2` puis copier/coller D1 vers D2. Que peut-on remarquer ?
4. Sélectionner les cases A1 et A2, placer le pointeur de la souris sur le coin en bas à droite de la sélection, cliquer puis en maintenant le clic tirer le pointeur jusqu'à la case A10. Ensuite, sélectionner les cases B1 et B2 et effectuer la même opération jusqu'à la case B10. Que peut-on remarquer ?
5. Faire de même dans les colonnes C et D. Que peut-on remarquer ?

2 Méthodes des rectangles

On rappelle qu'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ peut être interprétée géométriquement comme la valeur de l'aire algébrique située entre l'axe des abscisses et le graphe de la fonction f, délimitée à gauche et à droite par les droites $x = a$ et $x = b$.
On rappelle également que nous avons défini l'intégrale d'une fonction comme la limite de la somme des aires de rectangles approchant l'aire sous la courbe (voir le cours pour la définition précise).

Pour la suite, on supposera que la fonction à intégrer f est deux fois continument différentiable (f et ses deux premières dérivées sont continues).
Dans ce TP on cherche une valeur approchée de

$$I = \int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

la fonction f ainsi que les bornes a et b étant données.
Dans la suite on découpe l'intervalle de calcul $[a, b]$ en subdivisions

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Question 1. Combien y a-t-il de points (x_i) ? Combien y a-t-il d'intervalles $[x_i, x_{i+1}]$?

La méthode des rectangles est illustrée dans la Figure 1 pour les rectangles basés à gauche ou à droite, et sur la Figure 2 pour les rectangles basés sur le point milieu.

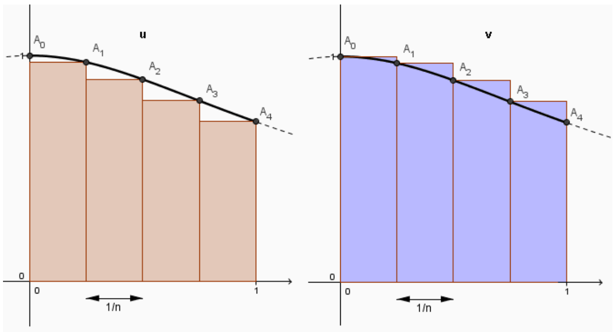

Figure 1: Méthode des rectangles "basés sur le coin supérieur droit" pour l'image de gauche et des rectangles "basés sur le coin supérieur gauche" pour l'image de droite.

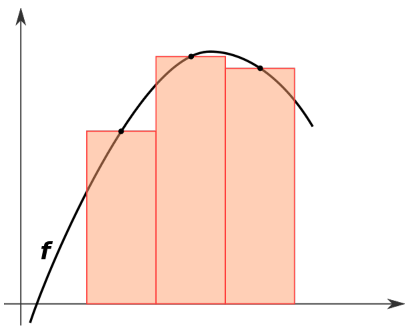

Figure 2: Méthode des rectangles basés sur le point milieu.

2.1 Rectangles "basés sur le coin supérieur droit"

Dans cette situation, une valeur approchée de I (aire totale sous la courbe) est donnée par la somme des aires des rectangles. On obtient la formules suivante

$$I \approx I_d = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}). \tag{2}$$

2.2 Rectangles "basés sur le coin supérieur gauche"

Dans cette situation, une valeur approchée de I (aire totale sous la courbe) est alors donnée par la somme des aires des rectangles. On obtient alors la formules suivante

$$I \approx I_g = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}). \tag{3}$$

2.3 Rectangles "basés sur le point milieu"

Dans cette situation, une valeur approchée de I (aire totale sous la courbe) est alors donnée par la somme des aires des rectangles. On obtient alors la formules suivante

$$I \approx I_m = \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)(x_j - x_{j-1}). \tag{4}$$

Exercice 3. On souhaite écrire un tableau pour calculer de manière approchée

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

en utilisant la méthode des rectangles basé sur le point de droite, avec $n = 10, 20, 40$ et 200 points régulièrement espacés. On donne

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Les valeurs de a, b doivent pouvoir être changés au besoin.

1. On commence par le cas $n = 10$.

   Entrer des valeurs au hasard de a et b en coordonnées C1,C2, par exemple $a = 0$ et $b = 1$.

   Construire un tableau décrivant en cellules A3:A13 les valeurs des (x_j) et en cellules B3:B13 les valeurs de $(f(x_j))$ pour j variant de 0 à 10 . On prendra garde au fait que, contrairement à la convention usuelle en mathématiques, le tableur effectue en général les opérations dans l'ordre où elles apparaissent. Ainsi, dans un tableur, $EXP(-3 \wedge 2) = e^9$. Pour obtenir $e^{-3^2} = e^{-9}$, il faut ajouter des parenthèses : $EXP(-(3 \wedge 2))$.

   Utiliser les valeurs précédemment obtenues pour calculer une valeur approchée de I par la méthode des rectangles basés au point de droite. Cette valeur pourra par exemple être rentrée en cellule D1.

2. Reproduire le même processus pour calculer une valeur approchée de I par la méthode des rectangles basés au point de droite avec $n = 20, 40$ et 200 (faire un nouveau tableau pour chaque valeur de n, les résultats seront utilisés à l'Exercice (5)).

3 Méthode des trapèzes

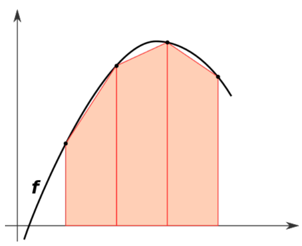

Figure 3: Méthode des trapèzes.

Une valeur approchée de I par la méthode des trapèzes est donnée par la formule

$$I \approx I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \right) (x_{j+1} - x_j). \tag{5}$$

La méthode des trapèzes est illustrée dans la Figure 3.

Exercice 4. On souhaite écrire un tableau pour calculer de manière approchée

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

en utilisant la méthode des trapèzes, avec $n = 10, 20, 40$ et 200 intervalles réguliers. On donne

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Les valeurs de a, b doivent pouvoir être changés au besoin.

1. Commencer par faire une table pour calculer I pour $n = 10$.

2. Reprenez avec $n = 20, 40$ et 200.

4 Calcul de l'erreur

Si on appelle I_n la valeur obtenue avec n points, l'erreur absolue est donnée par $|I_n - I|$. Si il existe une constante $C > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout n,

$$|I_n - I| \leq Cn^{-k}, \tag{6}$$

on dit que la méthode est *d'ordre k*. Plus k est grand, meilleure est la méthode. Pour obtenir expérimentalement la valeur de k, on trace un graphe log-log de l'erreur en fonction de n (i.e. avec $\ln(n)$ en abscisse et $\ln(|I_n - I|)$ en ordonnée). Si la valeur théorique de I n'est pas connue, on la remplace par une valeur calculée avec n très très grand. On obtient alors une droite de coefficient directeur $-k$. En effet, en prennant le logarithme de l'inégalité (6), on obtient

$$\ln(|I_n - I|) \leq \ln(C) - k \ln(n).$$

Le second membre de l'inégalité donne bien une droite en $\ln(n)$, de coefficient directeur $-k$ (et d'ordonnée à l'origine $\ln(C)$).

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer les ordres de la méthode des rectangles et de la méthode des trapèzes.

1. L'intégrale que nous cherchions à calculer dans les exercices précédents est très utile en statistique. Elle est liée à la *fonction d'erreur de Gauss*, qui est définie par

$$\operatorname{erf}(a; b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-x^2} dx.$$

   La fonction d'erreur est préprogrammée dans le tableur sous le nom de *ERF*. À l'aide de cette fonction préprogrammée, calculer

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

2. On note I_n^R (resp. I_n^T) les valeur obtenues dans l'exercice 3 pour la méthode des rectangles (resp. dans l'exercice 4 pour la méthode des trapèzes). Représenter graphiquement les points de coordonnées $(\ln(n), \ln(|I_n^R - I|))$ et $(\ln(n), \ln(|I_n^T - I|))$ pour $n = 10, 20, 40, 200$ (commencer par construire un tableau avec les valeurs de $\ln(n)$, $\ln(|I_n^R - I|)$ et $\ln(|I_n^T - I|)$)). Pour simplifier, on pourra faire un graphique pour la méthode des rectangles et un graphique pour la méthode des trapèzes.

3. Déterminer l'ordre de la méthode des rectangles et de la méthode des trapèzes à l'aide des graphiques construits précédement.