Intégration
Équations différentielles
Algèbre linéaire

Intégration

Exercice 1 (Primitives et intégrales usuelles)**.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 2x^2\sqrt{x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^7}, \quad f_3(x) = \frac{3}{(5-7x)^3},$$

$$f_4(x) = \frac{4}{3x+2}, \quad f_5(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right), \quad f_6(x) = e^{1-2x}, \quad f_7(x) = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}.$$

Exercice 2 (Calcul d'aire)**.**

(1) Tracer le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ et se situant sous les deux courbes d'équations $y = (x-1)^2 + 1$ et $y = (x+1)^2 + 1$.

(2) Calculer l'aire du domaine défini dans la question 1).

Exercice 3 (Intégration par parties)**.** Calculer la valeur des intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(3x)dx, \quad I_2 = \int_0^1 \arctan(x)dx, \quad I_3 = \int_1^e x^2\ln(x)dx.$$

Exercice 4 (Changement de variable)**.** Calculer la valeur des intégrales ci-dessous à l'aide des changements de variables indiqués.

$$I_4 = \int_0^1 \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx, \quad t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right); \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{1+\sin(x)}, \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 5 (Décomposition en éléments simples)**.** Calculer les intégrales suivantes.

$$I_6 = \int_3^4 \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}, \quad I_7 = \int_2^3 \frac{6x}{(x^2-1)(x^2+2)}dx, \quad I_8 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}.$$

Exercice 6 (Synthèse)**.** Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x - e^{-x}}dx$.

Équations différentielles

Dans chacun des exercices, x désignera une variable réelle et y une fonction de x.

Exercice 7 (Variables séparables)**.** Soit l'équation différentielle

$$y' = \frac{x^2}{y^2}. \tag{E$_1$}$$

Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1) par la méthode de séparation des variables et préciser quelle est la solution qui en $x = 0$ vaut $y(0) = 2$.

Exercice 8 (Premier ordre, sans second membre, à coefficients constants)**.** On désigne par $N(t)$ le nombre d'atomes radioactifs contenus dans un matériau au temps t. La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire modélisé par l'équation différentielle suivante

$$N'(t) = -\lambda N(t), \tag{E$_2$}$$

où $\lambda \in]0, +\infty[$ est la *constante radioactive*, qui dépend du type d'atomes considéré.

(1) Soit $N_0 \in]0, +\infty[$. Déterminer la solution de (E_2) telle que $N(0) = N_0$.

(2) Dans le cas du Cesium 135, produit de la fission dans un réacteur nucléaire, la valeur mesurée de λ est $2,31.10^{-7}$ lorsque t est exprimé en année. En déduire la demi-vie du Cesium 135, c'est à dire le temps nécessaire pour que la quantité de noyaux radiocatifs soit divisée par deux.

(3) On a pu déterminer en laboratoire que la demi-vie du Radium 226, résidu de l'exploitation d'une mine d'uranium, est d'environ 1600 ans. En déduire la valeur de λ pour le Radium 226.

Exercice 9 (Premier ordre, sans second membre, à coefficients variables)**.** Pour $x \in]0, +\infty[$, calculer la solution générale de l'équation différentielle

$$x^2y' - y = 0. \tag{E$_3$}$$

Exercice 10 (Premier ordre, avec second membre)**.** On considère l'équation différentielle

$$y' + y = \cos(x) + \sin(x). \tag{E$_4$}$$

(1) Écrire l'équation sans second membre associée à (E_4) et calculer sa solution générale.

(2) Trouver une solution particulière de (E_4).

(3) Déduire de 1. et 2. la solution générale de (E_4).

Exercice 11 (Premier ordre, variation de la constante)**.** Pour $x \in]0, +\infty[$, on considère l'équation différentielle

$$xy' - y = x^2e^x. \tag{E$_5$}$$

(1) Écrire l'équation sans second membre associée à (E_5) et calculer sa solution générale.

(2) Trouver une solution particulière de (E_5) en utilisant la méthode de variation de la constante.

(3) Déduire de 1. et 2. la solution générale de (E_5).

Exercice 12 (Équations du second ordre)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-2x}, \tag{E$_6$}$$
$$y'' + 2y' - 3y = e^{x}, \tag{E$_7$}$$
$$y'' + 2y' + y = e^{2x}. \tag{E$_8$}$$

Exercice 13 (Équations du second ordre, suite)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2x) + 2\sin(2x), \tag{E$_9$}$$
$$y'' + y' + 2y = 2x^2 - x + 3. \tag{E$_{10}$}$$

Exercice 14 (Équations du second ordre, facultatifs)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$y'' + y' = 2, \tag{E$_{11}$}$$
$$y'' = x^2 + x - 3, \tag{E$_{12}$}$$
$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos(x), \tag{E$_{13}$}$$
$$y'' + 4y = \cos(2x) + 2x^2 - 3x + 1. \tag{E$_{14}$}$$

Algèbre linéaire

Exercice 15 (Calcul matriciel)**.** Effectuer, lorsqu'elles sont possibles, les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 (Calcul matriciel)**.** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Effectuer, lorsqu'ils sont possibles, les produits suivants :

$$A \cdot A^t, \quad A^t \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B^t, \quad B \cdot A^t, \quad B \cdot A.$$

Exercice 17 (Systèmes linéaires)**.** On considère les systèmes suivants :

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= -2x_1 + x_2 + x_3, \\ y_3 &= 3x_1 - x_2 - 2x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ z_2 = 3y_1 + y_2 - 2y_3. \end{cases}$$

(1) Exprimer ces systèmes sous forme matricielle, c'est à dire trouver les matrices A et B telles que pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, on a $Y = AX$ et $Z = BY$.
(2) En déduire les expressions de z_1 et z_2 en fonction de x_1, x_2 et x_3.

Exercice 18 (Inversion de matrices)**.** Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 (Résolution de système linéaire)**.** On considère le système

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1, \\ -x + 2y - z = 0, \\ x + y + 4z = 0. \end{cases}$$

(1) Écrire ce système sous forme matricielle $AX = B$.
(2) Trouver l'inverse de A.
(3) En déduire la solution du système.

Exercice 20 (Déterminants)**.** Calculer les déterminants des matrices

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21 (Déterminants)**.** Utiliser des opérations sur les lignes et les colonnes pour calculer les déterminants suivants en effectuant un minimum d'opérations.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix}.$$

Exercice 22 (Dépendance et indépendance linéaire)**.** Soient $U_1 = (1,2)$, $U_2 = (-1,1)$ et $U_3 = (2,3)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Utiliser les définitions du cours pour montrer que

(1) le système $S = (U_1, U_2)$ est libre,
(2) le système $S' = (U_1, U_2, U_3)$ est générateur de $\mathbb{R}^2$,
(3) le système $S' = (U_1, U_2, U_3)$ est lié.

Exercice 23 (Application linéaire)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\} = \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$ et l'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_1+2x_2}{2x_1+4x_2}$.

(1) Vérifier que g est une application linéaire.
(2) Écrire la matrice A représentant g dans la base B_0.
(3) Soient $\vec{u} = \binom{2}{-1}$ et $\vec{v} = \binom{1}{2}$. Montrer que $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(3) Écrire la matrice Δ représentant g dans la base B_1.
(4) Donner P la matrice de changement de base de B_0 vers B_1, et calculer les produits $P\Delta$ et AP.
(5) Calculer l'inverse de P et en déduire la relation liant les deux représentations A et Δ de g.

Exercice 24 (Rotation)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ et du produit scalaire usuel noté $(\cdot|\cdot)$, on considère le vecteur $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$ et $r_{\vec{w}}$ la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ autour de l'axe orienté $(O, \vec{w})$. On définit un ensemble de vecteurs $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ avec $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k})$.

(1) Vérifier que B_1 est une base orthonormée (directe) de $\mathbb{R}^3$ (indication : on pourra vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux et effectuer le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$).
(2) Déterminer la matrice R_1 représentant $r_{\vec{w}}$ dans la base B_1.
(3) Soit Q la matrice de changement de base de B_0 vers B_1. Écrire la matrice Q et vérifier que $QQ^t = I$. En déduire Q^{-1}.
(4) On note R_0 la matrice de $r_{\vec{w}}$ dans la base B_0. Exprimer R_0 en fonction de Q et R_1 puis calculer R_0.
(5) Calculer matriciellement l'image du vecteur $\vec{\imath}$ par la rotation $r_{\vec{w}}$.

Exercice 25 (Diagonalisation)**.** (1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Diagonaliser les matrices B et C.