# Révisions

**Exercice 1** (Calcul fractionnaire)**.** Sans utiliser de calculatrice, effectuer les calculs suivants.

$$(a)\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\qquad (b)\quad \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}},\qquad (c)\quad \frac{a}{\frac{a}{\frac{a}{\frac{a}{a}}}},\qquad (d)\quad \sum_{i=1}^{8} i,\qquad (e)\quad \sum_{i=1}^{4}\frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

**Exercice 2** (Identités remarquables)**.** Soient $a$ et $b$ deux réels.

1) Compléter les identités remarquables suivantes.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &=\\ (a-b)^2 &=\\ (a+b)(a-b) &=\end{aligned}$$

2) Quel est le signe de $3-\sqrt{11}$ ? En développant $\left(3-\sqrt{11}\right)^2$, donner une expression simple de $\sqrt{20-6\sqrt{11}}$.

3) Écrire une formule pour $(a+b)^3$. En écrivant $101=100+1$, calculer $101^3$.

**Exercice 3** (Puissances)**.** Sans utiliser de calculatrice, effectuer les calculs suivants.

$$(a)\quad 11^{-2}\times 11^{12}\times 11^{-9},\qquad (b)\quad 2^1+2^2+2^3,\qquad (c)\quad 2^{(3^2)},\qquad (d)\quad \left(2^3\right)^2,\qquad (e)\quad 2^{3^2}.$$

**Exercice 4** (Équations polynomiales)**.** Résoudre les équations suivantes (dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$).

1) $2x^2-3x+1=0,\qquad 2x^2-2x+1=0,\qquad x^2+3x=0,\qquad x^2+2x+1=0.$

2) $x^4-8x^2+15=0.$

3) $x^3+2x^2-1=0$ (indication : rechercher une racine évidente puis factoriser).

**Exercice 5** (Exponentielle)**.**

1) Quel est le domaine de définition de la fonction $x\mapsto e^x$ ?

2) Rappeler les valeurs de $e^0$ et $e^1$.

3) Rappeler les valeurs des limites suivantes.

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty} e^x,\qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty} x^n e^x\quad (n\in\mathbb{N}),\qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty} e^x,\qquad (d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}\quad (n\in\mathbb{N}).$$

4) Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Exprimer $e^{a+b}$ et $e^{a-b}$ en fonction de $e^a$ et $e^b$.

**Exercice 6** (Logarithme)**.**

1) Quel est le domaine de définition de la fonction $x\mapsto \ln(x)$ ?

2) Rappeler les valeurs de $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

3) Rappeler les valeurs des limites suivantes.

$$(a)\ \lim_{x\to0}\ln(x),\qquad (b)\ \lim_{x\to0} x^n\ln(x)\quad (n\in\mathbb{N}),\qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty}\ln(x),\qquad (d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}\quad (n\in\mathbb{N}).$$

4) Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Exprimer $\ln(ab)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ et $\ln(a^b)$ en fonction de $\ln(a)$ et $\ln(b)$.

5) Calculer $\quad \ln\left(\frac{1}{e}\right),\quad \ln(\sqrt{e}),\quad \ln(\sqrt[3]{e}),\quad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right),\quad \ln(e^{10}).$

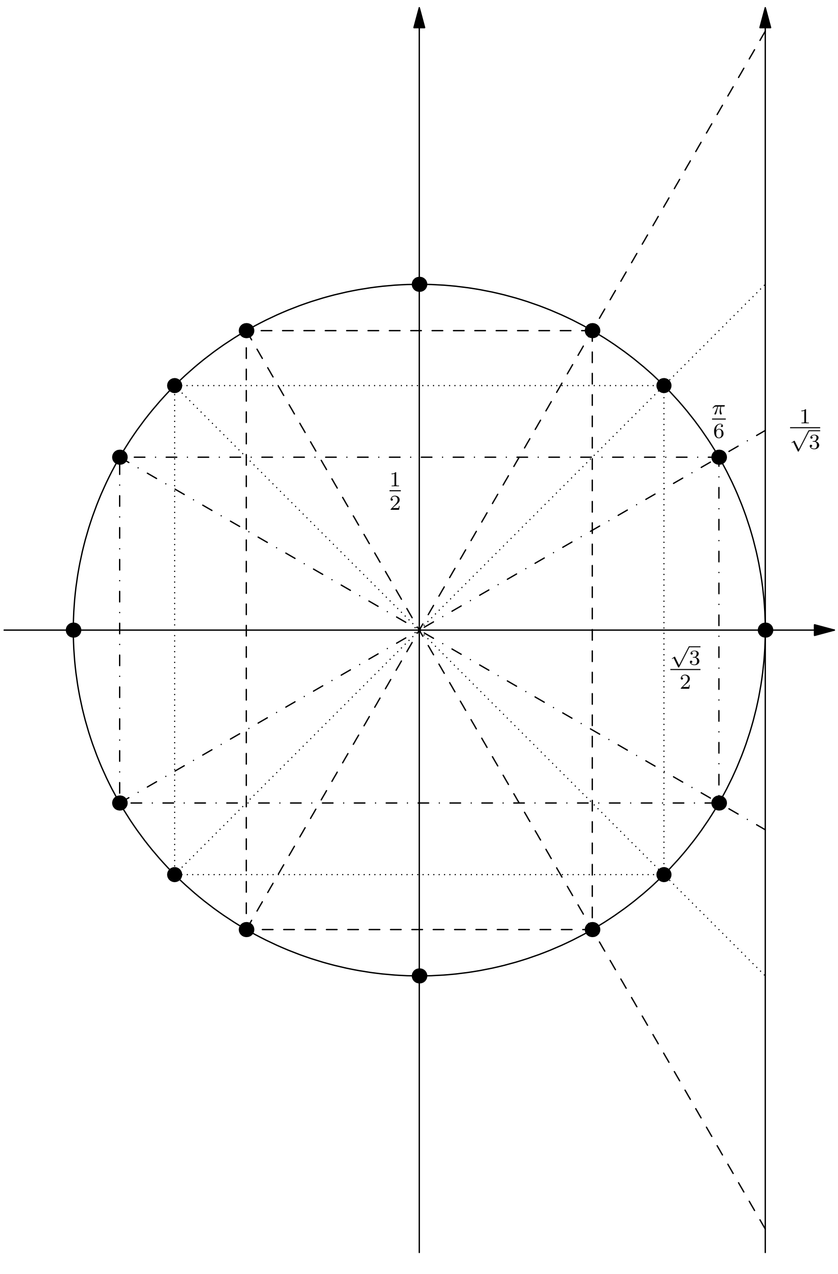
**Exercice 7** (Étude de signe)**.** Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Déterminer le signe des expressions suivantes en fonction de la valeur de $x$.

$$(a)\quad x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\qquad (b)\quad x^2-\frac{\pi^2}{4},\qquad (c)\quad \sin(x)\cos(x),\qquad (d)\quad \ln\left(\frac{4|x|}{\pi}\right)\quad (x\neq 0).$$

**Exercice 8** (Systèmes linéaires)**.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(1)\quad \begin{cases} 5x+2y &= 4,\\ 4x-3y &= 17.\end{cases}\qquad (2)\quad \begin{cases} 2x+3y &= 4,\\ 4x+5y &= 6.\end{cases}$$

**Exercice 9** (Cercle trigonométrique)**.** Comme sur l'exemple, reporter pour chacun des points du cercle trigonométrique l'angle (entre $-\pi$ et $\pi$) formé avec l'axe des abscisses et les valeurs des cosinus, sinus et tangente.




**Remarques sur les fonctions trigonométriques.**

- Même s'il est parfois possible d'omettre les parenthèses entourant les variables des fonctions trigonométriques (en écrivant par exemple $\sin x$ à la place de $\sin(x)$), on préférera éviter cette notation qui peut prêter à confusion.
- On rappelle également qu'il est d'usage de noter les puissances des fonctions trigonométriques de la façon suivante.

$$\cos^2(x) = (\cos(x))^2,\quad \tan^4(x) = (\tan(x))^4,\quad \text{etc.}$$

**Exercice 10** (Angle double et réduction du carré)**.** On rappelle que si $a$ et $b$ sont deux angles, alors le cosinus et le sinus de $a+b$ sont donnés par les formules

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ .

1) Compléter l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) =$ (théorème de Pythagore).
2) Exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3) A l'aide du théorème de Pythagore, exprimer $\cos(2x)$ en fonction uniquement de $\cos(x)$ puis uniquement de $\sin(x)$.
4) Exprimer $\cos^2(x)$, $\sin^2(x)$ et $\tan^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$.
5) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 11** (Nombres complexes)**.**

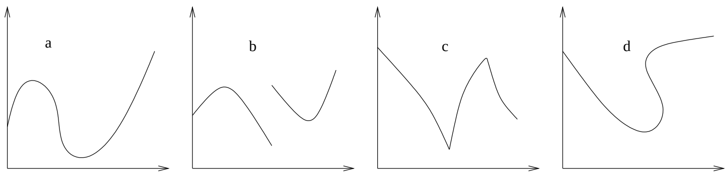
1) Écrire les nombres complexes suivants sous forme cartésienne.

$$(1+i)^2, \qquad (1+i)(1-i), \qquad \frac{1+i}{1-i}, \qquad \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \qquad e^{i\frac{\pi}{2}}, \qquad \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2, \qquad (\cos(13\pi) + i\sin(15\pi)))^{13}.$$

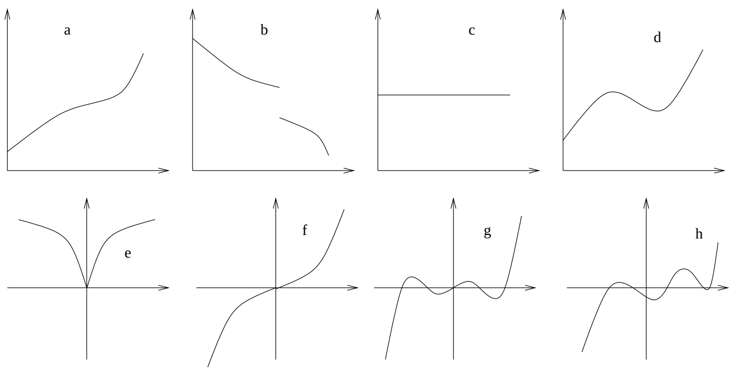
2) Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

$$1+i\sqrt{3}, \qquad \left(2e^{i\frac{\pi}{9}}\right)^3, \qquad -12, \qquad 15i, \qquad 12+12i, \qquad \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}, \qquad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{11}.$$

**Exercice 12** (Graphes)**.** Parmis les graphes suivants, déterminer ceux qui sont les graphes de fonctions continues.




**Exercice 13** (Graphes)**.** Parmis les graphes suivants, déterminer ceux qui sont les graphes de fonctions croissantes, décroissantes, paires ou impaires.




**Exercice 14** (Fonctions composées)**.**

1) Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Rappeler la signification de la notation $f \circ g$.
2) On pose $f(x) = x^2 e^x$ et $g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Calculer $f(2)$, $g(1)$, $f \circ g(0)$. Calculer aussi $g \circ g(0)$ et $f \circ f \circ g(0)$.

**Exercice 15** (Limites)**.** Calculer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2$, $\quad \lim\limits_{x\to 1} x^2-2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} x^2 - e^x + \dfrac{1-x}{1+x} + \ln(1+x)$.

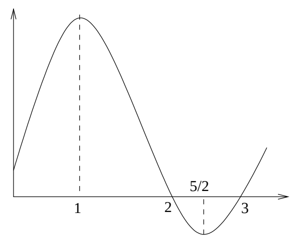
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x$, $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} x^2$, $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} -x^3+x^2$.

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^3-5}$, $\quad \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3-5}$.

**Exercice 16** (Graphe, dérivée, primitive)**.** Le graphique ci-dessous est celui d'une fonction $f$.

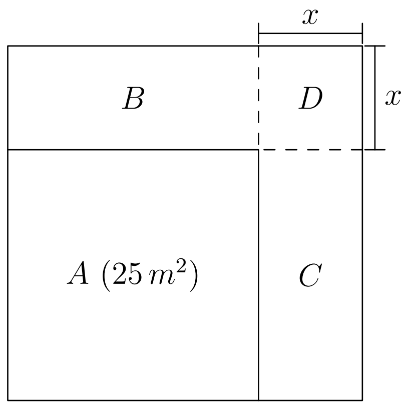
1) Donner à partir de ce graphe, un graphe possible pour la dérivée de $f$.

2) Donner un graphe possible pour une fonction dont la dérivée serait la fonction $f$.




**Exercice 17** (Calcul d'aire)**.**

À l'occasion de la construction de la bibliothèque de la maison de la sagesse, al-Ma'mun[1] charge al-Khawarizmi[2] de concevoir le plan du nouveau bâtiment. Les contraintes sont les suivantes. Au sol, le batiment occupera une surface carrée, dont la longueur du coté est à déterminer. À l'intérieur de la bibliothèque, une surface carrée ($A$ sur la figure ci-jointe) de $25\,m^2$ sera consacré à la salle de travail. Les étagères remplies de livres occuperont deux surfaces rectangulaires ($B$ et $C$ sur la figure ci-jointe). L'espace restant ($D$ sur la figure ci-jointe) sera destiné à l'accueil des visiteurs. Le bâtiment respecte des proportions harmonieuse, en particulier l'aire occupée par $A$ est la même que la somme des aires occupées par $B$, $C$ et $D$.




1) On appelle $l$ la longueur du coté de la surface $A$. Quelle est sa valeur ?
2) On appelle $x$ la longueur du coté de la surface $D$. Exprimer les aires de $B$, $C$ et $D$ en fonction de $x$ et de $l$.
3) Sachant que l'aire de $A$ est égale à la sommes des aires de $B$, $C$ et $D$, en déduire une équation sur $x$.
4) Résoudre algébriquement l'équation obtenue en 3) et en déduire la valeur de $x$.

**Exercice 18** (Valeur absolue)**.**

1) Dessiner le graphe de la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$.

2) Représenter graphiquement les solutions de l'équation $|x| = 2$ et $|x| = -5$.

3) Même question pour les inéquations $|x| \geq 1$ et $|x| \leq 2$ .

4) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$\left|x-\frac{3}{2}\right| = -1 \qquad \left|2x-\frac{3}{2}\right| = 1 \qquad \left|x^2-1\right| = 2 \qquad \left|x^2-2\right| = 1.$

$\left|x-\frac{1}{2}\right| \geq 1 \qquad |x-2| \leq 3 \qquad \left|x^2-1\right| \geq 3.$

1. Calife de Bagdad de 813 à 833 (786-833).
2. Mathématicien perse (783-850).