Révisions

Exercice 1.

$$(a)\quad \frac{7}{12}, \qquad (b)\quad \frac{6}{5}, \qquad (c)\quad a, \qquad (d)\quad 36, \qquad (e)\quad \frac{7}{12}.$$

Exercice 2. 1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

2) $3-\sqrt{11}<0$, $\left(3-\sqrt{11}\right)^2 = 20-6\sqrt{11}$, $\sqrt{20-6\sqrt{11}} = \sqrt{11}-3$.

3) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. $101^3 = 1030301$.

Exercice 3.

$(a)\quad 11^{-2}\times 11^{12}\times 11^{-9} = 11, \quad (b)\quad 2^1+2^2+2^3 = 14, \quad (c)\quad 2^{(3^2)} = 512, \quad (d)\quad \left(2^3\right)^2 = 64, \quad (e)\quad 2^{3^2} = 512.$

Exercice 4 (Équations polynomiales)**.** Résoudre les équations suivantes (dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$).

1) $2x^2-3x+1=0$, $x_1 = 1/2, x_2 = 1$; $2x^2-2x+1=0$, $x_1 = \frac{1-i}{2}, x_2 = \frac{1+i}{2}$; $x^2+3x=0$, $x_1 = 0, x_2 = -3$; $x^2+2x+1=0$, $x_1 = -1$ racine double.

2) $x^4-8x^2+15=0$, $\{\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}\}$.

3) $x^3+2x^2-1=0$, $\{-1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$.

Exercice 5 (Exponentielle)**.**

1) $\mathbb{R}$

2) $e^0 = 1$, $e^1 = e \simeq 2,71$.

3) Rappeler les valeurs des limites suivantes.

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad (b)\ \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n\in\mathbb{N}), \qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad (d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n\in\mathbb{N}).$$

4) $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

Exercice 6 (Logarithme)**.**

1) $]0, +\infty[$.

2) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

3) $(a)\ \lim_{x\to0}\ln(x) = -\infty$, $(b)\ \lim_{x\to0} x^n\ln(x) = 0$,
$(c)\ \lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$, $(d)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

4) $\ln(ab) = \ln(a)+\ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a)-\ln(b)$ et $\ln(a^b) = b\ln(a)$

5) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$, $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$, $\ln(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3}$, $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2}$, $\ln(e^{10}) = 10$.

Exercice 7 (Étude de signe)**.** Soit $x\in[-\pi,\pi]$. Déterminer le signe des expressions suivantes en fonction de la valeur de x.

(a)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
x		$-$		$-$		$+$		$+$	
$x-\frac{\pi}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{\pi}{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(b)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x-\frac{\pi}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{\pi}{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = x^2-\frac{\pi^2}{4}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

(c)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)\cos(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

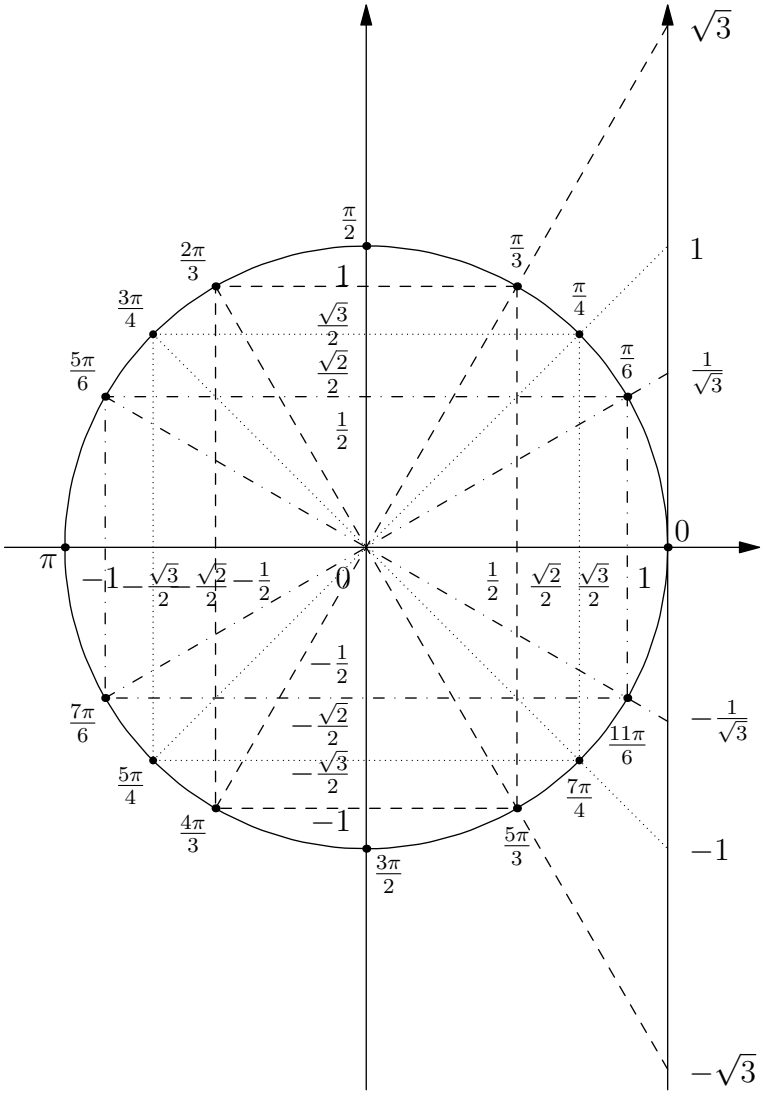
(d)

x	$-\infty$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$+\infty$
$\frac{4\lvert x\rvert}{\pi}-1$		$+$	0	$-$	$\lVert$	$-$	0	$+$	
$\ln\left(\frac{4\lvert x\rvert}{\pi}\right)$		$+$	0	$-$	$\lVert$	$-$	0	$+$	

Exercice 8 (Systèmes linéaires)**.**

$$(1)\quad \begin{cases} x &= 2, \\ y &= -3. \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x &= -1, \\ y &= 2. \end{cases}$$

Exercice 9 (Cercle trigonométrique)**.**



Exercice 10 (Angle double et réduction du carré)**.** 1) $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

2) $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$, $\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$.

3) $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$.

4) $\cos^2(x)=\dfrac{\cos(2x)+1}{2}$, $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, $\tan^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$.

5) $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$.

Exercice 11 (Nombres complexes)**.**

1) $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)(1-i) = 2$, $\dfrac{1+i}{1-i} = i$, $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+i}{2}$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$,

$$\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (\cos(13\pi) + i\sin(15\pi)))^{13} = -1.$$

2) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $\left(2e^{i\frac{\pi}{9}}\right)^3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$, $-12 = 12e^{i\pi}$,

$$15i = 15e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad 12 + 12i = 12\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{11} = i.$$

Exercice 12 (Graphes)**.** (a) et (c)

Exercice 13 (Graphes)**.** (a) croissante, (b) décroissante, (c) constante, (d) rien, (e) paire, (f) impaire, (g) impaire, (h) rien.

Exercice 14 (Fonctions composées)**.**

1) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. La notation $f \circ g$ (prononcer f *rond* g) désigne la fonction dite *composée* définie par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

2) $f(2) = 4e^2, g(1) = 0, f \circ g(0) = f(1) = e$. $g \circ g\,(0) = g(1) = 0$ et $f \circ f \circ g\,(0) = f \circ f(1) = f(e) = e^{2+e}$.

Exercice 15 (Limites)**.**

1) $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 2 = -1$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - e^x + \dfrac{1-x}{1+x} + \ln(1+x) = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 + x^2 = +\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^3-5} = -\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3-5} = 0$.