Mathématiques Examen S1

12 janvier 2012, 10h15-12h15

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (5 pts)**.** On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{argth}(x), \qquad f_2 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

1. (a) Rappeler l'ensemble de définition et l'image (ensemble d'arrivée) de f_1.
   (b) Rappeler la dérivée de f_1.
   (c) Calculer $f_1(0)$.
2. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f_2.
   (b) Calculer la dérivée de f_2.
   (c) Calculer $f_2(0)$.
3. Déduire de 1. et 2. une relation liant f_1 et f_2.

Exercice 2 (3 pts)**.**

1. Rappeler la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$.
3. Montrer que $1 + \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2 = 2(1+x^2)\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
4. En utilisant les réponses aux questions 2 et 3, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$.
5. Montrer que $\arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (3,5 pts)**.** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\operatorname{ch}(x)$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.
2. Écrire sur $[0, x]$ la formule de Taylor pour la fonction f en 0 à l'ordre 2.
3. En déduire une valeur approchée de $f(0,1)$.

Exercice 4 (3 pts)**.**

1. Rappeler ou calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions suivantes.

$$(a) \quad x \mapsto \cos(x), \qquad (b) \quad x \mapsto e^x, \qquad (c) \quad x \mapsto \ln(1+x), \qquad (d) \quad x \mapsto x + \frac{x^2}{2} + x^3 + x^4.$$

2. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x + \frac{x^2}{2} + x^3 + x^4 - \ln(1+x)}$.

Exercice 5 (3,5 pts)**.** Au Cercle, célèbre club de jeu londonien, James B. joue à la version suivante du jeu de Baccarat. James mise 5£ et reçoit une carte tirée au hasard. Chaque carte est identifiée par sa valeur (un chiffre allant de 1 à 10 ou un personnage parmi le valet V, la dame D ou le roi R) et une couleur (carreau $\diamondsuit$, cœur $\heartsuit$, pique $\spadesuit$ ou trèfle $\clubsuit$). On suppose que la probabilité d'être tirée est identique pour chaque carte. James reçoit en gain la valeur indiquée sur la carte si celle-ci est un chiffre, rien du tout sinon. Par exemple, si la carte est le $10\heartsuit$, alors James reçoit 10£ ; si la carte est le valet de pique $V\spadesuit$, alors James reçoit 0£. On appelle X la variable aléatoire représentant les gains de James.

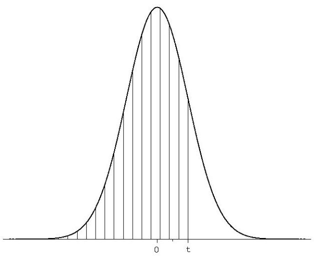
1. Combien y a-t-il de cartes possibles ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir le valet de pique $V\spadesuit$? Quelle est la probabilité d'obtenir une carte avec le cœur $\heartsuit$ comme couleur ?
3. Donner la loi de X.
4. Calculer l'espérance de X. En déduire si James a plus de chance d'être gagnant ou perdant à la fin de la soirée.

Exercice 6 (2 pts)**.** Une entreprise fabrique des planches de bois. On désigne par X la variable aléatoire qui mesure l'épaisseur de la plaque en mm et on suppose que X suit une loi normale de moyenne $m = 30$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer la probabilité pour que X soit inférieur à 32 mm.
2. Calculer la probabilité pour que X soit compris entre 28 et 32 mm.

Annexe : Table de la fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite



La table ci-dessous donne les valeurs de la fonction de répartition donne les valeurs de la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. Précisément, si Y suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1, alors la fonction de répartition Π est telle que

$$\Pi(t) = P(Y \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Solution On considère les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{argth}(x), \qquad f_2 : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

1. (a) On a $f_1 :]-1,1[\to \mathbb{R}$.
   (b) On a $f_1' = \frac{1}{1-x^2}$.
   (c) On a $f_1(0) = 0$.
2. (a) On a $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ si et seulement si $x \in]-1,1[$.
   (b) La fonction f_2 est définie sur $]-1,1[$.
   (c) On a $f_2' = \frac{1}{1-x^2}$.
   (d) On a $f_2(0) = 0$.
3. Comme $(f_1 - f_2)'(x) = 0$ et $f_1(0) = f_2(0)$, on a $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Solution.

1. La dérivée est donnée par $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. La dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$.
3. Il suffit de développer le carré puis de mettre en facteur $(1+x^2)$.
4. La dérivée est la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right)\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}$ qui devient après simplification la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.
5. La dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ est nulle, donc cette fonction est constante. Pour connaître la valeur de la constante, on évalue la fonction en un point, par exemple 0. On a
$$\arctan(0) + 2\arctan\left(\sqrt{1+0^2}-0\right) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}.$$
Par conséquent, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité
$$\arctan(x) + 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution.

1. $f'(x) = \operatorname{ch}(x) + x\operatorname{sh}(x)$, $f''(x) = 2\operatorname{sh}(x) + x\operatorname{ch}(x)$, $f'''(x) = 3\operatorname{ch}(x) + x\operatorname{sh}(x)$.
2. $f(x) = x + \frac{3x^3\operatorname{ch}(x)+x^4\operatorname{sh}(x)}{6}$, $c \in [0,x]$.
3. $f(0,1) \simeq P_2(1) = 0,1$.

Solution.

1. On a les développements limités suivants en 0.
   (a) $\cos(x) = 1 + \frac{1}{-2}\cdot x^2 + x^2\varepsilon(x)$,
   (b) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + x^2\varepsilon(x)$,
   (c) $\ln(1+x)) = x + \frac{1}{-2}\cdot x^2 + x^2\varepsilon(x)$,
   (d) $x + \dfrac{x^2}{2} + x^3 + x^4 = x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$.
2. En remplaçant au numérateur et dénominateur par les développements limités en 0 à l'ordre 2, on obtient
$$\frac{\cos(x) + x - e^x}{x + \dfrac{x^2}{2} + x^3 + x^4 - \ln(1+x)} = \frac{x^2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2 + x^2\varepsilon(x)} = \frac{1+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}.$$
Par conséquence,
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x + \dfrac{x^2}{2} + x^3 + x^4 - \ln(1+x)} = 1.$$

Solution.

1. Il y a 52 cartes possibles.
2. La probabilité d'obtenir le valet de pique $V\spadesuit$ est $P(V\spadesuit) = \frac{1}{52}$. La probabilité d'obtenir une carte avec le cœur $\heartsuit$ comme couleur est $P(\heartsuit) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
3. La loi de X est $P(X = 0) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ et $P(X = k) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ pour $k = 1, ..., 10$.
4. $E(X) = \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{13} = \frac{55}{13}$. Comme $E(X) < 5$, James a plus de chance d'être perdant à la fin de la soirée.

Solution.

1. $P(X \leq 32) = P(\frac{X-30}{2} \leq 1) = 0.8413$.
2. $P(28 \leq X \leq 32) = P(-1 \leq \frac{X-30}{2} \leq 1) =$
$P(\frac{X-30}{2} \leq 1) - P(\frac{X-30}{2} \leq -1) = P(\frac{X-30}{2} \leq 1) - (1 - P(\frac{X-30}{2} \leq 1) = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826$.