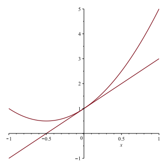
Eléments de Correction du contrôle de S1 - Samedi 15 décembre 2012

Exercice 1. Question de cours : Le théorème des Accroissements finis.

Exercice 2. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $g(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$, $h(x) = f(x) + g(x)$.

1. Sachant que $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ pour $a = \frac{\pi}{8}$ on obtient $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1 = \frac{2\tan(\frac{\pi}{8})}{1-\tan^2(\frac{\pi}{8})}$.
   Ainsi $\tan^2(\frac{\pi}{8}) + 2\tan(\frac{\pi}{8}) - 1 = 0$.
2. On pose $X = \tan(\frac{\pi}{8})$ avec $X > 0$ car $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ ce qui permet de définir le polynôme du second degré $X^2 + 2X - 1 = 0$. Ce polynôme admet deux racines. La racine positive est $\sqrt{2}-1$ d'où $\tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}-1$.
3. Ce qui permet de conclure que $\arctan\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi}{8}$.
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
   g est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   h est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.
5. $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ et $\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)' = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.
6. $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$, par identification : $a = 2$ et $b = 1$.
7. $g'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$, par identification : $c = 1$ et $d = 2$.
8. On note K_1 et K_2 deux constantes.
   $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$ d'où $f(x) = 2\arctan(x) + K_1$ et $g'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$ d'où $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x) + K_2$.
   $f(0) = \underbrace{\arcsin(0)}_{0} = 2\underbrace{\arctan(0)}_{0} + K_1$ d'où $K_1 = 0$, finalement $f(x) = 2\arctan(x)$.
   De même $g(1) = \underbrace{\arctan(\sqrt{2}-1)}_{\frac{\pi}{8}\text{(question 3)}} = \frac{1}{2}\underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}} + K_2$ d'où $K_2 = 0$, finalement $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$.
   En conclusion : $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{5}{2}\arctan(x)$.

Exercice 3. Soit la fonction

1. Sachant que le Développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^c$, $c \in]0, x[$
   $f(x) = e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2}e^{c_1}$, $c_1 \in]0, 2x[$ d'où $P_1(x) = 1 + 2x$.
2. $f(x) = e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6}e^{c_2}$, $c_2 \in]0, 2x[$ d'où $P_2(x) = 1 + 2x + 2x^2$.
3. 

   $e^{0.2} \approx P_1(0.1) = 1.2$ et $e^{0.2} \approx P_2(0.1) = 1.22$. Ces deux valeurs sont par défaut car les restes sont positifs. En effet $e^{0.2} - P_1(0.1) = \frac{(2\times 0.1)^2}{2}e^{c_1} > 0$ et $e^{0.2} - P_2(0.1) = \frac{(2\times 0.1)^3}{6}e^{c_2} > 0$.

Exercice 4.

1. $f(x) = \mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$.
2. D.L. ordre 2 de $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$ d'où $g(x) = x\ \mathrm{ch}(x) = x + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$.
3. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\mathrm{sh}(x)-x}{x\ \mathrm{ch}(x)} = \frac{x+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon_1(x)-x}{x+\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon_2(x)} = \frac{\frac{x^2}{6}+x^2\varepsilon_1(x)}{1+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)} = 0$.

Exercice 5. Soit O l'événement : "la personne possède un ordinateur".

1. $P(O) = \frac{80}{100} = 0.8$ et $P(\bar{O}) = 1 - P(O) = 0.2$.
2. $P(O, O, O) = 0.8^3 = \frac{512}{1000} = 0.512$.
3. $P(O, \bar{O}, \bar{O}) + P(\bar{O}, O, \bar{O}) + P(\bar{O}, \bar{O}, O) = 3 \times 0.2^2 \times 0.8 = 0.096$.

Exercice 6. X la variable aléatoire mesurant le diamètre d'un tube et suit la loi normale $N(20, 0.1)$. On introduit la nouvelle variable aléatoire $Y = \frac{X-20}{0.1}$ qui suit la loi normale $N(0, 1)$ d'où $X = 0.1Y + 20$.

1. $P(X \geq 20.25) = P(0.1Y + 20 \geq 20.25) = P(Y \geq 2.5) = 1 - P(Y \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$.
2. $P(X \leq 19.75) = P(Y \leq -2.5) = P(Y \geq 2.5) = 0.0062$.
3. $P(19.75 \leq X \leq 20.25) = P(-2.5 \leq Y \leq 2.5)2P(Y \leq 2.5) - 1 = 0.9876$.
4. Chercher t tel que $P(20 - t \leq X \leq 20 + t) = P(-t \leq Y \leq t) = 0.95 = 2\Pi(t) - 1$ d'où $\Pi(t) = 0.975$ ($\Pi(t)$ représente l'aire dans la table Normale centrée réduite $N(0, 1)$, sous la courbe à gauche de la droite $x = t$). D'aprés la table, $t = 1.96$ ce qui donne l'intervalle de confiance $[20 - 1.96 \times 0.1, 20 + 1.96 \times 0.1] = [19.804, 20.196]$.