Adaptation

Trigonométrie

Exercice 1 (Formules de Simpson[1] **).** Ces formules permettent de transformer un produit en somme ou une somme en produit. Considérons deux angles p et q.

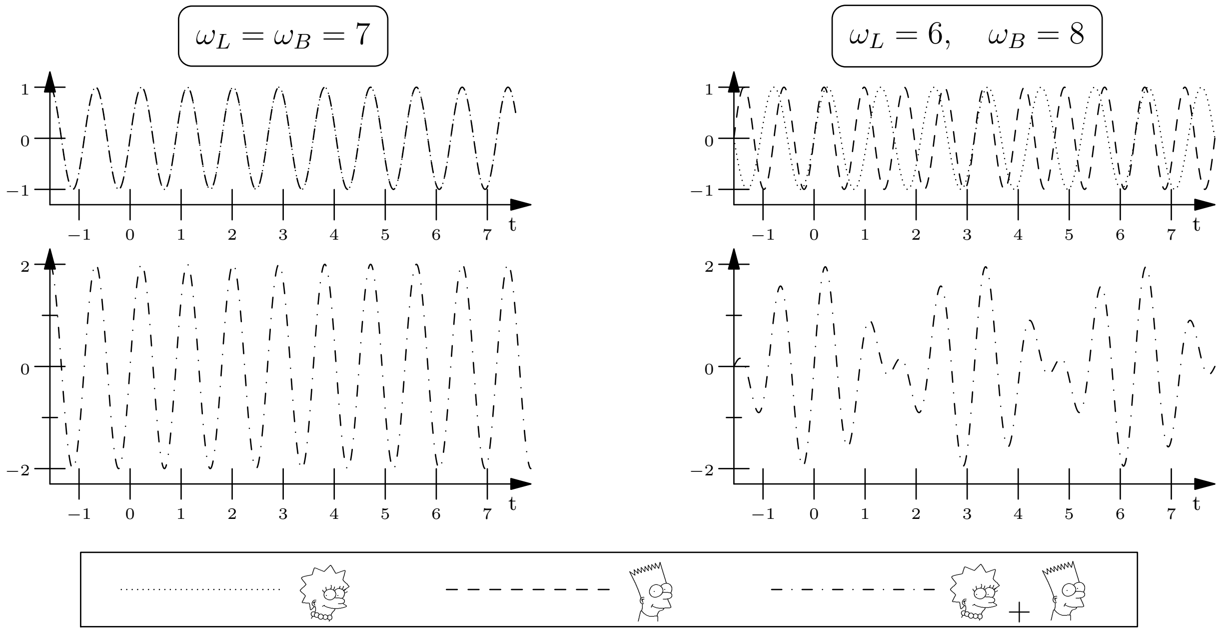
1) Démontrer les formules de transformation de produits en sommes suivantes.

$$\begin{aligned}
2\cos(p)\cos(q) &= \cos(p+q)+\cos(p-q),\\
2\sin(p)\cos(q) &= \sin(p+q)+\sin(p-q),\\
2\sin(p)\sin(q) &= \cos(p-q)-\cos(p+q).
\end{aligned}$$

2) À l'aide du changement de variables $p' = \dfrac{p+q}{2}$ et $q' = \dfrac{p-q}{2}$, démontrer les formules de transformation de sommes en produits suivantes.

$$\begin{aligned}
\sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right),\\
\sin(p)-\sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right),\\
\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).
\end{aligned}$$

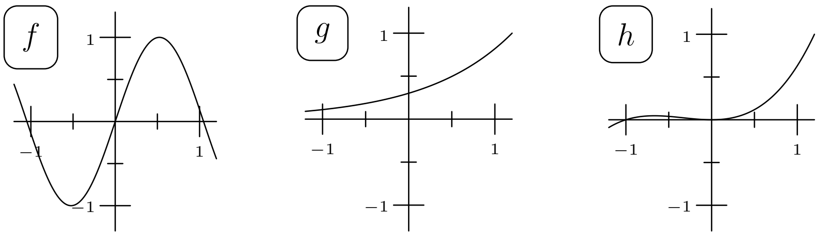
Application : Lisa et Bart ont décidé de monter un duo musical. Ils utilisent deux instruments de musique rudimentaires émettant chacun un son de même amplitude 1, de fréquence ω_L pour l'instrument de Lisa et de fréquence ω_B pour l'instrument de Bart. Si t désigne le temps, le son émis par Lisa est donc $\sin(\omega_L t)$ et celui émis par Bart $\sin(\omega_B t)$. Si leurs deux instruments sont parfaitement accordés, c'est à dire si $\omega_L = \omega_B = \omega$, alors le son qu'ils produiront ensemble sera simplement $2\sin(\omega t)$. Mais s'ils ont mal accordé leurs instruments, par exemple si $\omega_L = 6$ et $\omega_B = 8$, alors le son qu'ils produiront ensemble sera un son de fréquence 7 (donnée par $\sin(7t)$) *mais* dont l'amplitude, au lieu d'être constante, se modifiera selon $2\cos(t)$, créant ainsi un phénomène dit de *battement* bien connu des musiciens.



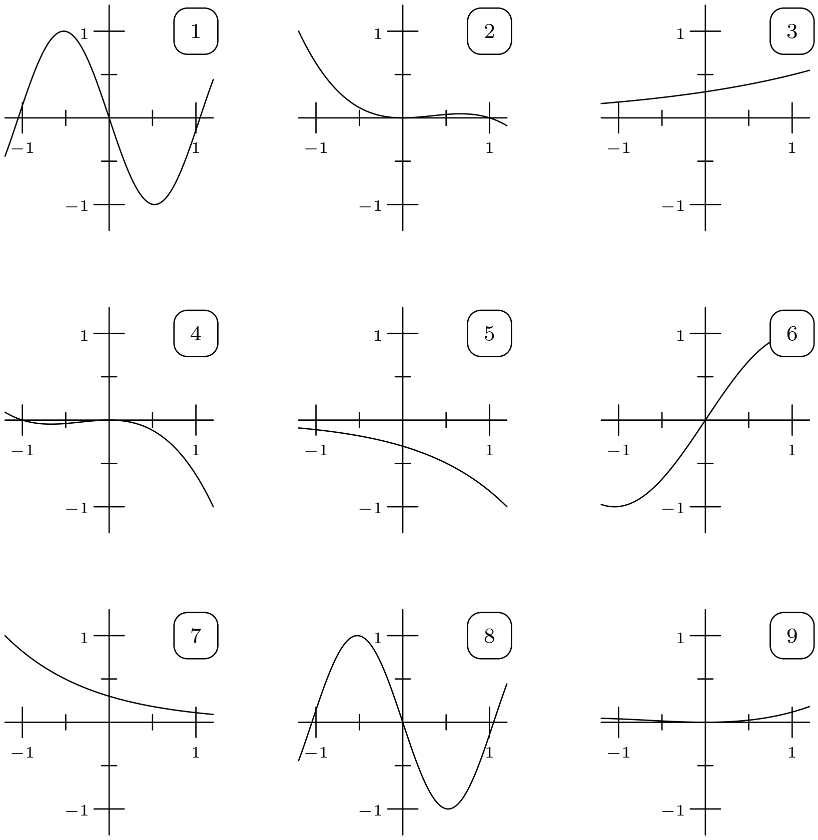
[1] de Thomas Simpson (1710-1761), mathématicien britannique.

Fonctions

Exercice 2. Voici les graphes de trois fonctions f, g et h.



Voici, dans le désordre, les graphs de $-f$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto f(\frac{x}{2})$, $-g$, $x \mapsto g(-x)$, $x \mapsto g(\frac{x}{2})$, $-h$, $x \mapsto h(-x)$, $x \mapsto h(\frac{x}{2})$. Retrouver quel graphe correspond à quelle fonction.



Exercice 3 (QCM)**.** Choisir la bonne réponse aux question suivantes.

1) $\sin(3\pi) =$

☐ 0 ☐ 1 ☐ π ☐ $\frac{1}{2}$

2) On pose $a = \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$. Alors $\cos(a^2) =$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 1 ☐ π ☐ $\frac{1}{2}$

3) On pose $f(x) = e^{\cos(x)}$. Alors $f(\frac{\pi}{2}) =$

☐ 0 ☐ 1 ☐ π ☐ $\frac{1}{2}$

4) On pose $f(x) = \sin(\cos(\sin(x)) - 1)$. Alors $f(2\pi) =$

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\pi - 1$ ☐ $\frac{1}{2}$

5) On pose $f(x) = e^{x^2 \ln(x)}$. Alors $f(1) =$

☐ 0 ☐ 1 ☐ e ☐ x

Exercice 4. On considère deux fonctions f et g dont on ne connaît les valeurs qu'en quelques points.

x	0	1	2
$f(x)$	2	1	0
$g(x)$	1	2	0

Calculer $f \circ g(0)$, $f \circ g(1)$, $g \circ f(0)$, $g \circ f(2)$.

Exercice 5 (Étude de la fonction cos)**.** Le but de cet exercice est de faire l'étude de la fonction cosinus.

1) Quel est le domaine de définition de cos ?

2) Rappeler la définition d'une fonction périodique. La fonction cosinus est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa plus petite période ?

3) Rappeler la définition d'une fonction paire. La fonction cosinus est-elle paire ?

4) Un intervalle d'étude d'une fonction est un petit intervalle sur lequel on peut étudier la fonction et déduire ensuite la fonction sur le reste de son ensemble de définition par périodicité et parité. Quel intervalle d'étude proposer pour cos ?

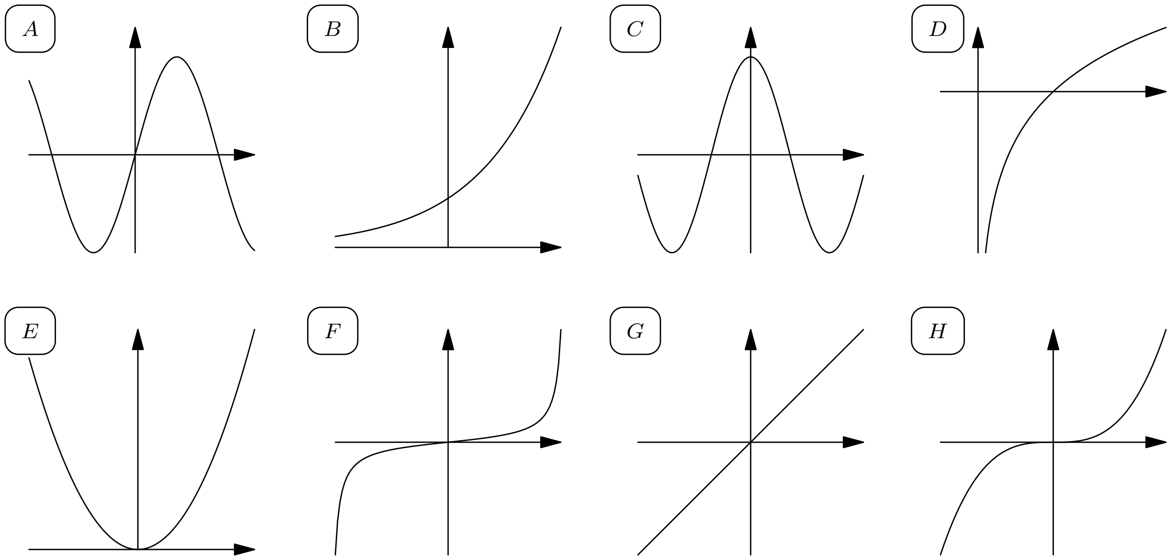
5) Quelles sont les valeurs remarquables de la fonction cosinus sur l'intervalle d'étude choisi ?

6) Quelle est la dérivée $\cos'$ de la fonction cosinus ? Et sa dérivée seconde $\cos''$?

7) Étudier le signe de $\cos'$ et $\cos''$ sur l'intervalle d'étude choisi précédement et faire le tableau de variation de la fonction cosinus.

8) Effectuer la représentation graphique de la fonction cosinus sur l'intervalle d'étude choisi. En déduire l'allure de la représentation graphique de la fonction cosinus sur son ensemble de définition.

Exercice 6 (Fonctions usuelles)**.** Newton[2] vient de recevoir un courrier de Leibniz[3] contenant les représentations graphiques des fonctions cos, sin, tan, exp, ln, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$. Leibniz ayant oublié de préciser les légendes sur ses dessins, aidez Newton à retrouver quel graphe correspond à quelle fonction.



[2]Isaac Newton (1643–1727) philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais.

[3]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 –1716) philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand.

Dérivation

Exercice 7 (QCM)**.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Choisir la bonne réponse aux question suivantes.

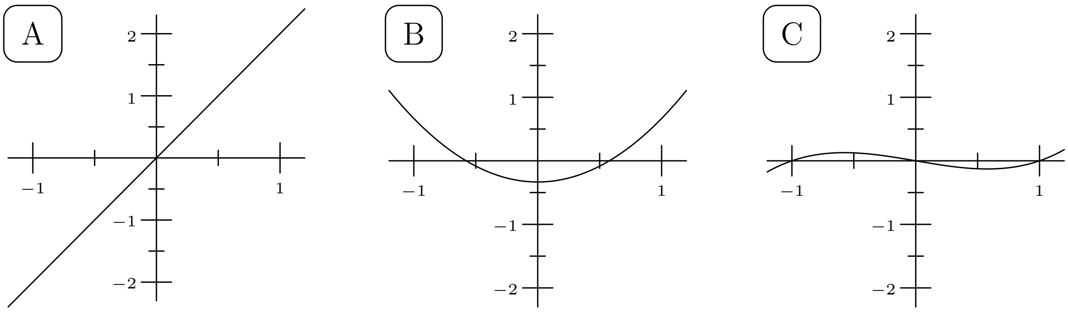
1) Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

   ☐ $f'(x) > 0$ ☐ $f'(x) \geq 0$ ☐ $f'(x) = 0$ ☐ $f'(x) \leq 0$ ☐ $f'(x) < 0$

2) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) \geq 0$, alors

   ☐ f est strictement décroissante ☐ f est décroissante ☐ f est constante
   ☐ f est croissante ☐ f est strictement croissante

Exercice 8 ( )**.** Schrödinger[4] venait de dessiner les graphes d'une fonction f, de sa dérivée première f' et de sa dérivée seconde f'' lorsque son chat a sauté sur le bureau et mélangé ses dessins. Aider Schrödinger à retrouver parmi les graphes suivants lesquels correspondent à f, f' et f''.



Exercice 9. Compléter les tables suivantes. Dans les Tables 3 et 4, u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	
$\ln(x)$	
$\sin(x)$	
$\cos(x)$	
$\tan(x)$	

Table 1: Fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	
$\dfrac{1}{x}$	
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	
$\sqrt{x}$	
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	

Table 2: Fonctions puissances.

$f(x)$	$f'(x)$
$u + v$	
uv	
$\dfrac{1}{u}$	
$\dfrac{u}{v}$	
$u \circ v$	

Table 3: Opérations

$f(x)$	$f'(x)$
u^α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$	
e^u	
$\ln(u)$	
$\sin(u)$	
$\cos(u)$	

Table 4: Fonctions composées

[4] Erwin Schrödinger (1887 –1961) physicien et théoricien scientifique autrichien.

Exercice 10 (Pour commencer en douceur)**.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \sqrt{x} + \cos(x)$, $\quad f_2(x) = 3\ln(x) - 5\sin(x)$ $\quad f_3(x) = 5x^8 - 4x^7$, $\quad f_4(x) = e^x + \ln(x)$, $\quad f_5(x) = x\sqrt{x}$,

Exercice 11 (Cosinus & Sinus)**.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \cos(x) + \sin(x), \quad f_2(x) = \cos(x) - \sin(x), \quad f_3(x) = \sin(x)\cos(x), \quad f_4(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Exercice 12 (Limite de taux d'accroissement)**.**

1) Étant donné une fonction f, rappeler la définition du nombre dérivée de f en un point x_0.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$.

3) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$ (indication : faire apparaître le quotient de deux taux d'accroissement).

Exercice 13. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$(x^{11})' = 11x^{10}$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

$\left(e^{x^2}\right)' = x^2 e^{x^2}$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

$\big(\cos(\sin(\cos(x)))\big)' = \sin(x)\cos(\cos(x))\sin(\sin(\cos(x)))$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

$\big(\ln(\cos(x^2))\big)' = \dfrac{2x}{\cos(x^2)}$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

$\left(\cos\left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sin^2(x)}\cos\left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$ .... ☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 14 (Somme, produit, quotient)**.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = e^x\ln(x), \quad f_2(x) = \frac{\cos(x)}{e^x}, \quad f_3(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}, \quad f_4(x) = x^4\cos(x),$$
$$f_5(x) = x^9\ln(x), \quad f_6(x) = x^2e^x, \quad f_7(x) = \frac{\sin(x)}{e^x}, \quad f_8(x) = \sin(x)x^3.$$

Exercice 15 (Interlude)**.** La notion de dérivée apparaît dans de nombreuses situations où elle se dissimule souvent sous un nom différent. Compléter le tableau suivant avec le nom de la dérivée en fonction du contexte.

Contexte	Fonction	Variable	Dérivée
déplacement d'un mobile	position	temps	
écoulement d'un liquide	volume	temps	
électricité dans un fil	charge électrique	temps	

Exercice 16. On considère deux fonctions dérivables f et g. On ne connait les valeurs de f, g ou leurs dérivées qu'en quelques points :

x	0	1	2
$f(x)$	2	1	0
$g(x)$	1	2	0

x	0	1	2
$f'(x)$	1	0	2
$g'(x)$	2	1	1

Calculer $(f\circ g)'(0)$, $(f\circ g)'(1)$, $(g\circ f)'(0)$, $(g\circ f)'(2)$.

Exercice 17 (Fonctions composées)**.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \cos(3x), \quad f_2(x) = \ln(2x), \quad f_3(x) = e^{x^3}, \quad f_4(x) = \ln(x^8), \quad f_5(x) = \cos(x^2).$$

Exercice 18 (Derivative cloud)**.** Dans la figure ci-dessous, on a mélangé des fonctions et leurs dérivées. Comme sur l'exemple au centre, reconstituer les correspondances en reliant chaque fonction avec sa dérivée avec une flèche dont le début est sur la case de la fonction et la pointe sur la case de la dérivée.

$\tan(x)$ $\quad$ $\cos(x)$ $\quad$ $x^2\cos(e^x)$

$2x\cos(e^x) - x^2e^x\cos(e^x)$ $\quad$ x^4

$\ln(x)$

e^x $\quad$ $\dfrac{1}{x}$

$5x^2$

$-\sin(x)$ $\quad$ $e^{\sin(x)}$ $\quad$ $3x^2 \longleftarrow x^3$ $\quad$ $10x$ $\quad$ $\dfrac{x^5}{5}$

e^x

$\ln(x^2)$ $\quad$ $\dfrac{2}{x}$

$\cos(x)e^{\sin(x)}$

$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ $\quad$ $2xe^{x^2}\cos\left(e^{x^2}\right)$

$\dfrac{1}{\cos(x)}$ $\quad$ $\sin\left(e^{x^2}\right)$ $\quad$ $\dfrac{\tan(x)}{\cos(x)}$

Exercice 19 (Fonctions encore plus composées)**.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \ln(x^3 + \cos(x)), \quad f_2(x) = \cos(3x^2), \quad f_3(x) = \cos\left(e^{x^2}\right), \quad f_4(x) = \sin\left(e^{x^2} + x^2\right).$$

Exercice 20 (Fonctions composées abstraites)**.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$g_1 = f^3, \qquad g_2 = \frac{1}{f}, \qquad g_3 = \sqrt{f}, \qquad g_4 = \tan(f), \qquad g_5 = \sin(e^f), \qquad g_6 = e^{\sin(f)},$$
$$g_7 = \frac{1}{\cos(f)}, \qquad g_8 = \sqrt{\cos(f)}, \qquad g_9 = \ln(\sin(f)), \qquad g_{10} = \sin(f)\cos(f), \qquad g_{11} = f^6\ln(f).$$

Fonctions Hyperboliques

Exercice 21. Montrer que $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^3 = \mathrm{ch}(3x) + \mathrm{sh}(3x)$.

Exercice 22 (Simpson hyperbolique )**.** Soient x et y réels.

1) Montrer que

$$\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y),$$
$$\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y).$$

2) En déduire que

$$\mathrm{sh}(x) + \mathrm{sh}(y) = 2\,\mathrm{sh}(\frac{x+y}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2}),$$
$$\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(y) = 2\,\mathrm{ch}(\frac{x+y}{2})\,\mathrm{ch}(\frac{x-y}{2}).$$

Exercice 23. Soit $x \in]1, +\infty[$. En utilisant les formules d'addition pour les fonctions hyperboliques, transformer $\mathrm{ch}(2\,\mathrm{argch}(x))$ et $\dfrac{\mathrm{sh}(2\,\mathrm{argch}(x))}{\sqrt{x^2-1}}$ en polynômes en x.

Exercice 24. Résoudre l'équation $\mathrm{argch}(x) = \mathrm{argsh}(x - \frac{1}{2})$ pour $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 25. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f_1(x) = \mathrm{ch}(x^2), \qquad f_2(x) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x), \qquad f_3(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)},$$
$$f_4(x) = \mathrm{argsh}\left(\frac{x^2}{2}\right), \qquad f_5(x) = \mathrm{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Fonctions réciproques

Exercice 26 (Réciproque du logarithme)**.** La fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et admet donc une réciproque $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de cette réciproque.

1) Étudier les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

3) Soient a et b deux réels. Exprimer $f(a+b)$ et $f(a-b)$ en fonction de $f(a)$ et $f(b)$.

4) Calculer la dérivée de f. Que remarquez-vous ?

5) Effectuer la représentation graphique de ln puis celle de f.

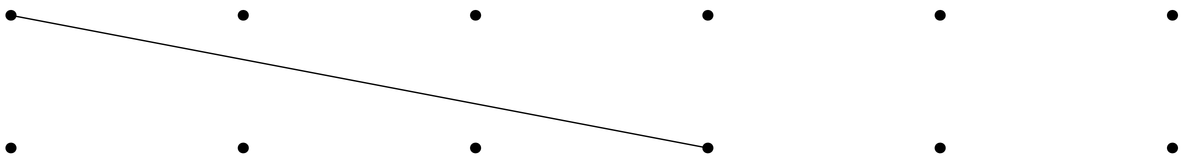
6) La fonction f est en réalité bien connue. L'avez-vous identifiée ?

Exercice 27. Déterminer, lorsque c'est possible, les valeurs suivantes.

$$\sin(\arcsin(\frac{1}{5})),\ \cos(\arcsin(\frac{1}{5})),\ \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}),\ \arccos(\cos(\frac{27\pi}{2})),\ \arcsin(\cos(35\pi)),\ \sin(14\pi),\ \arcsin(14).$$

Exercice 28. Soit $x \in]0, 1[$. Dans la figure ci-dessous, relier les points supérieurs avec les points inférieurs de telle manière qu'il y ait égalité entre les étiquettes de points reliés par un même trait.

$\cos(\arctan(x))$ $\quad$ $\tan(\arccos(x))$ $\quad$ $\tan(\arcsin(x))$ $\quad$ $\sin(\arctan(x))$ $\quad$ $\sin(\arccos(x))$ $\quad$ $\cos(\arcsin(x))$



$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ $\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad$ $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Exercice 29. Le tableau suivant a été mélangé. Le corriger en faisant correspondre à chaque élément de la ligne supérieure sa dérivée sur la ligne inférieure

$f(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\ln(1+x^2)$	$\arctan(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$
$f'(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{2x}{1+x^2}$

Formules de Taylor, développements limités

Exercice 30. À l'aide de la formule de Taylor, calculer les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivante.

$$e^x, \qquad \cos(x), \qquad \sin(x), \qquad (1+x)^\alpha, \qquad \ln(1+x).$$

Exercice 31.

1) Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 7 de $(\sin(x) - x)$ et $(\text{sh}(x) - x)$.

2) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 7 de $(\sin(x) - x)(\text{sh}(x) - x)$.

Exercice 32.

1) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 3 de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

2) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sin(x)\cos(x)$.

3) À l'aide de la formule de Taylor, calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\dfrac{\sin(2x)}{2}$.

4) Comparer les réponses aux questions 2) et 3) et expliquer.

Exercice 33.

1) Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 2 de e^x et $\cos(x)$. En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $e^x - \cos(x)$.

2) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $1 - \sqrt{1 - x^2}$.

3) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos(x)}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 34. On cherche à calculer le développement limité de $e^{\frac{1}{1-x}}$ en 0 à l'ordre 2.

1) Calculer le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre 2.

2) Calculer le développement limité de e^y en 1 à l'ordre 2 (indication : écrire $e^y = e^1 e^{y-1}$ et utiliser le développement limité de e^x en 0).

3) En déduire le développement limité de $e^{\frac{1}{1-x}}$ en 0 à l'ordre 2.

Probabilités et statistiques

Exercice 35. Le nombre de pannes journalières d'une machine sur une chaîne de fabrication est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante (à partir de 6 pannes dans la même journée, la machine est arrêtée et mise en révision).

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	0.40	0.15	0.15	0.10	0.10	0.05	0.05

1) Calculer $\text{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.

2) Quelle est la fonction de répartition de X ? En donner une représentation graphique.

3) Quelle est la probabilité pour que la machine ait plus de trois pannes journalières.

Exercice 36. A partir de données statistiques, on peut supposer que l'âge auquel un enfant commence à marcher suit une loi normale de moyenne $\mu = 13$ mois et d'écart-type $\sigma = 1.5$ mois.

1) Quelle est la probabilité qu'un enfant commence à marcher

   a) avant 11 mois ?
   b) avant 15 mois ?

2) Quelle est la probabilité qu'un enfant commence à marcher entre 11 et 15 mois ?

3) Quelle est la probabilité de se tromper en affirmant que le fils de la cousine Berthe commencera à marcher entre 12 et 15 mois ?