STRUCTURES MEMBRANAIRES

Vadim Schechtman[1]

À Volodya Drinfeld en témoignage d'amitié,

à l'occasion de son 50-ième anniversaire

TABLE DE MATIÈRES

[1]Laboratoire Émile Picard, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse

Introduction

Dans cette note on généralise quelques formules de [GMS] au cas de la troisième classe de Chern - Simons.

0.1. Soit X un schéma lisse sur un anneau commutatif $k \supset \mathbb{Q}$. La théorie de classes de Chern "style de Rham" associe à chaque fibré vectoriel E sur X des classes de cohomologie

$$c_i^{DR}(E) \in H^{2i}(X, \Omega^{\cdot}_X),\ i \geq 1,$$

qui satisfont aux propriétés usuelles, cf. [Gr], §6. Ici $\Omega^{\cdot}_X$ est le complexe de de Rham de X sur k. Par contre, on sait (cf. par exemple [BD], 2.8) que ces classes admettent une version plus fine: les classes *de Chern-Simons*

$$c_i^{CS}(E) \in H^i(X, \Omega_X^{[i,2i-1\rangle})$$

Ici

$$\Omega_X^{[i,2i-1\rangle} = \sigma_{\geq i}\tau_{\leq 2i-1}\Omega_X[i]:\ \Omega_X^i \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega_X^{2i-1,\mathrm{fer}},$$

où $\Omega_X^{j,\mathrm{fer}} \subset \Omega_X^j$ est le sous-faisceau des formes fermées. L'image de $c_i^{CS}(E)$ par le morphisme canonique

$$H^i(X, \Omega_X^{[i,2i-1\rangle}) \longrightarrow H^{2i}(X, \Omega^{\cdot}_X)$$

est égale à $c_i^{DR}(E)$.

Les images des $c_i^{CS}(E)$ par les morphismes évidents

$$H^i(X, \Omega_X^{[i,2i-1\rangle}) \longrightarrow H^i(X, \Omega_X^i)$$

sont les classes de Chern "style Hodge" $c_i^{\mathrm{Hdg}}(E)$, cf. [Gr], §6.

Il est très facile de décrire explicitement la première classe de Chern-Simons $c_1^{CS}(E) \in H^1(X, \Omega_X^{1,\mathrm{fer}})$. En effet, si $r = \mathrm{rk}(E)$, choisissons un 1-cocycle de Čech définissant E, $\phi = \{\phi_{ij}\} \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, GL_r(\mathcal{O}_X))$ sur un récouvrement ouvert $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ de X convenable; $\phi_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, GL_r(\mathcal{O}_X))$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Alors $c_1^{CS}(E)$ est la classe de cohomologie du 1-cocycle de Čech

$$z_1^{CS}(E) = \{tr(\phi_{ij}^{-1} d\phi_{ij})\} \in \check{Z}^1(\mathfrak{U}, \Omega_X^{1,\mathrm{fer}})$$

Il est clair que $z_1^{CS}(E) = z_1^{CS}(\det(E))$, où $\det(E) = \Lambda^r_{\mathcal{O}_X}(E)$ est le fibré en droites la puissance exterieure maximal de E.

Soit L un fibré en droites. Considérons le faisceau $\mathcal{C}onn\mathcal{I}nt(L)$ de connexions intégrables sur L; ceci est un torseur sous $\Omega_X^{1,\mathrm{fer}}$, dont la classe caractéristique $c(\mathcal{C}onn\mathcal{I}nt(L))$ (l'obstruction à l'existence d'une section globale) est égale à $c_1^{CS}(L)$.

Donc, pour E arbitraire, $c_1^{CS}(E)$ est la classe du $\Omega_X^{1,\mathrm{fer}}$-torseur $\mathcal{C}onn\mathcal{I}nt(\det(E))$. On peut dire que ce torseur est "une raison d'être" de la première classe de Chern-Simons.

Désormais nous ne nous serons interessés que par le cas $E = \mathcal{T}_X$, le fibré tangent de X. Au lieu des classes de Chern c_i on va considerer les "caractères de Chern" ch_i, donnés par les polynômes de Newton usuels, i.e. $ch_1 = c_1,\ ch_2 = c_1^2 - c_2/2$, etc. D'ailleurs, dans cette note on ne discutera que les cas $i = 1, 2, 3$.

Dans le §3 on décrit explicitement des cocycles qui représentent les caractères $ch_i^{CS}(\mathcal{T}_X)$ pour $i = 2, 3$.

Il est facile de voir (cf. par exemple [GMS], §11) que la donnée d'une connexion intégrable sur $\det(\mathcal{T}_X)$ équivaut à celle d'une application k-linéaire $c:\ \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ vérifiant deux propriétés

$$c(a\tau) = ac(\tau) + \tau(a) \tag{$CY1$}$$

et

$$c([\tau, \tau']) = \tau c(\tau') - \tau' c(\tau) \tag{$CY2$}$$

$(a \in \mathcal{O}_X,\ \ \tau, \tau' \in \mathcal{T}_X)$. Ces axiomes entraînent d'ailleurs que c est un opérateur différentiel (d'ordre 1). On appelle un tel opérateur *une structure de Calabi-Yau* sur $\mathcal{T}_X$.

0.2. Les structures semblables, mais correspondantes au *deuxième* caractère de Chern-Simons, sont liées aux *algèbres vertex*. Une algèbre vertex est l'algèbre des symétries fondamentale de la *théorie des cordes quantiques*. Dans [GMS] on a étudié une classe particulière de ces algèbres: les algèbres vertex des opérateurs differentiels (VDO).

Définir un faisceau de VDO sur X revient à définir *une structure vertex* sur $\mathcal{T}_X$, c'est à dire: trois opérateurs différentiels

$$\gamma:\ \mathcal{O}_X \otimes_k \mathcal{T}_X \longrightarrow \Omega^1_X,\ \ \langle , \rangle:\ S^2\mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X \ \text{ et } c:\ \Lambda^2\mathcal{T}_X \longrightarrow \Omega^1_X,$$

vérifiants cinq axiomes analogues aux $(CY_1), (CY_2)$, cf. op. cit. 1.4, où 7.3 ci-dessous. Le théorème principal de op. cit. dit que toutes les structures vertex sur $\mathcal{T}_X$ forment une *gerbe* sous le complexe $\Omega_X^{[1,2\rangle}$, dont la classe caractéristique est égale à $ch_2^{CS}(\mathcal{T}_X)$. Cette gerbe est donc "la raison d'être" de la classe $ch_2^{CS}(\mathcal{T}_X)$.

Les axiomes d'une structure vertex ont l'air assez mystérieux; dans [GMS] ils se déduisent des axiomes de Borcherds pour une algèbre vertex. Par contre, dans [S] on a donné une interprétation de ces axiomes qui ne fait aucune référence aux algèbres vertex. On a introduit un complexe naturel de faisceaux sur X, $\mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X$, dit le deuxième complexe de *Hochschild - Koszul - de Rham*, muni d'une inclusion de complexes

$$\sigma_{\geq 2}\sigma_{\leq 5}\Omega_X[2] \hookrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X \tag{0.2.1}$$

et d'un 2-cocycle canonique

$$\epsilon^{(2)}_X \in Z^2\ \Gamma(X, \mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X)$$

Pour expliquer la structure de $\mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X$ on utilise la notion d'un *tricomplexe tordu* (de k-modules). Un tel objet est un k-module $\mathbb{Z}^3$-gradué $C^{\cdot\cdot\cdot} = \{C^{pqr}\}_{p,q,r\in\mathbb{Z}}$ munie d'une collection d'endomorphismes $\{d_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ où d_{ij} est de degré $(i, j, -i-j+1)$, c'est à dire que d_{ij} est une collection $d_{ij} = \{d^{pqr}_{ij}\}_{p,q,r\in\mathbb{Z}}$ où

$d_{ij}^{pqr} \in Hom(C^{pqr}, C^{p+i,q+j,r-i-j+1})$. On exige les deux propriétés (a) et (b) si-dessous.

(a) (Finitude.) Pour chaque p, q, r et chaque $x \in C^{pqr}$ il n'y a qu'un nombre fini de $d_{ij}(x)$ qui sont différents de 0.

Définissons un k-module $\mathbb{Z}$-gradué $C^{\cdot}$ par

$$C^i = \oplus_{p+q+r=i}\ C^{pqr}$$

Posons $d = \sum_{ij}\ d_{ij}$; ceci est un endomorphisme de degré 1 de $C^{\cdot}$, bien défini grace à (a).

(b) $d^2 = 0$.

(Cette définition est plus générale que celle donnée dans §1.)

Le couple $(C^{\cdot}, d)$ est appelé *le complexe simple associé à* $C^{\cdots}$.

Par exemple, si que $d' = d_{10}, d'' = d_{01}$ et $d''' = d_{00}$ sont différents de zéro, on retrouve la notion usuelle d'un complexe triple.

Notre complexe $\mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X$ est le complexe simple associé à un fasceau de tricomplexes tordus $\{\mathcal{HKR}(2)^{pqr}_X\}$, qui est une structure de dimension 3, p étant la dimension "de de Rham", q étant la dimension "de Koszul" et r étant la dimension "de Hochschild". Les seules composantes d_{ij} non triviales sont: d_{10} ("de de Rham"), d_{01} ("de Koszul"), d_{00} ("de Hochschild") et deux flèches complémentaires, $d_{2,-1}$ et $d_{1,-1}$.

Ce complexe tordu apparaît de manière essentiellement unique, lorsque l'on ajoute une dimension hochschildienne au complexe de de Rham. La dimension koszulienne et les flèches complémentaires $d_{2,-1}$ et $d_{1,-1}$ viennent alors naturellement. La construction est reproduite (suivant [S]) dans le §6.

Par exemple, la composante $\mathcal{HKR}(2)^1_X$ est égale à

$$\mathcal{H}om_k(\mathcal{O}_X \otimes_k \mathcal{T}_X, \Omega^1_X) \oplus \mathcal{H}om_k(S^2\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X) \oplus \mathcal{H}om_k(\Lambda^2\mathcal{T}_X, \Omega^1_X)$$

Une structure vertex (au-dessus de X) est un élément

$$v_X = (\gamma_X, \langle,\rangle_X, c_X) \in \Gamma(X, \mathcal{HKR}(2)^1_X)$$

tel que $d_{\mathcal{HKR}}(v_X) = \epsilon^{(2)}_X$, où $d_{\mathcal{HKR}}$ désigne la différentielle dans $\mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X$.

Par exemple, soit $\mathfrak{b} = \{\tau_p\} \subset \Gamma(X, \mathcal{T}_X)$ *une base abélienne*, c'est-à-dire que $\Gamma(X, \mathcal{T}_X)$ est un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-module libre de base $\mathfrak{b}$ et tous les vecteurs de cette base commutent. Grâce à la lissité de X, de telles bases existent Zariski localement. À une $\mathfrak{b}$ on peut associer une structure vertex $v_{\mathfrak{b}}$. De plus, si $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ sont deux bases abéliennes, on peut définir un élément $h_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'} \in \Gamma(X, \mathcal{HKR}(2)^0_X)$ tel que

$$d_{\mathcal{HKR}} h_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}'} = v_{\mathfrak{b}'} - v_{\mathfrak{b}}$$

Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un recouvrement ouvert de X et pour chaque i fixons une base abélienne $\mathfrak{b}_i \subset \Gamma(U_i, \mathcal{T}_X)$, d'où les collections

$$v_{\mathfrak{U},\mathfrak{b}} = \{v_{\mathfrak{b}_i}\} \in \prod_i\ \Gamma(U_i, \mathcal{HKR}(2)^1_X)$$

et

$$h_{\mathfrak{U},\mathfrak{b}} = \{h_{\mathfrak{b}_i\mathfrak{b}_j}\} \in \prod_{ij} \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{HKR}(2)^0_X)$$

On peut considérer le couple $\hat{v} = (v_{\mathfrak{U},\mathfrak{b}}, h_{\mathfrak{U},\mathfrak{b}})$ comme une 1-cochaîne du complexe $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \mathcal{HKR}(2)_X)$ (complexe simple associé au complexe double $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X)$).

L'inclusion (0.2.1) induit l'inclusion de complexes

$$\mu : \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \Omega_X^{[2,3\rangle}) \hookrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \mathcal{HKR}(2)_X)$$

De l'autre part, on a le morphisme évident de complexes

$$\delta : \ \Gamma(X, \mathcal{HKR}(2)^{\cdot}_X) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \mathcal{HKR}(2)_X)$$

La cochaîne $\hat{v}$ est construite dans §7, dont résultat principal dit que $D\hat{v} = \mu(\beta^{(2)}) + \delta(\epsilon^{(2)})$, où

$$\beta^{(2)} \in \check{\mathrm{C}}^2(\mathfrak{U}, \Omega_X^{[2,3\rangle})$$

est un cocycle représentant le deuxième caractère de Chern-Simons du fibré tangent et D désigne la différentielle totale dans $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \mathcal{HKR}(2)_X)$. Cela est une variation sur le calcul principal de [GMS].

Les structures de Calabi-Yau admettent une interprétation tout à fait parallèle, cf. [S] et §4, §5 ci-dessous.

0.3. On peut appeler *i-branaires* les structures de la Géométrie Différentielle sous-jacent au $i+1$-ième caractère de Chern - Simons.

Pour passer à dimension 3, il faudra définir le troisième complexe de Hochschild - Koszul - de Rham $\mathcal{HKR}(3)^{\cdot}_X$ et procéder comme ci-dessus. Dans cette note on fait une partie de travail.

(a) La partie "Hochschild - Koszul". On construit dans §8 un complexe naturel $\mathcal{HK}(3)^{\cdot}_X$ qui est le complexe simple associé au complexe double. Il est muni d'inclusion

$$\Omega^3_X \hookrightarrow \mathcal{HK}(3)^{\cdot}_X$$

et d'un cocycle canonique

$$\epsilon^{(3)}_{X,\mathcal{HK}} \in Z^3\Gamma(X, \mathcal{HK}(3)^{\cdot}_X)$$

On appellera "structure prémembranaire" un élément $\pi \in \Gamma(X, \mathcal{HK}(3)^2_X)$ tel que $d_{\mathcal{HK}}\pi = \epsilon_X$. Cette notion est analogue à celle d'une préalgébroïde vertex, cf. [GMS], 4.1. Les structures prémembranaires forment une "2-gerbe" sous Ω^3_X dont la classe caractéristique est égale au troisième caractère de Chern style Hodge $ch_3^{\mathrm{Hdg}}(\mathcal{T}_X) \in H^3(X, \Omega^3_X)$, cf. §9.

(b) La partie "Koszul - de Rham". On construit dans §10 un complexe naturel $\mathcal{KR}(3)^{\cdot}_X$ qui est le complexe simple associé à un "bicomplexe tordu", cf. §1. Il est muni d'inclusion de complexes

$$\sigma_{\geq 3}\sigma_{\leq 6}\Omega^{\cdot}_X[3] \hookrightarrow \mathcal{KR}(3)^{\cdot}_X$$

Étant donné un recouvrement $\mathfrak{U}$ de X, cette inclusion induit l'inclusion de complexes

$$\mu : \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \Omega_X^{[3,5\rangle}) \hookrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \mathcal{KR}(3)_X)$$

Si l'on choisit une collection de bases abéliennes $\mathfrak{b}$ comme ci-dessus, on définira dans §11 une cochaîne $\hat{m} \in \check{\mathrm{C}}^2(\mathfrak{U}; \mathcal{KR}(3)_X)$ telle que $D\hat{m} = \mu(\hat{\beta}^{(3)})$, où D est la différentielle dans $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{U}; \mathcal{KR}(3)_X)$ et

$$\beta^{(3)} \in \check{\mathrm{Z}}^3(\mathfrak{U}, \Omega_X^{[3,5\rangle})$$

représente la classe $ch_3^{CS}(\mathcal{T}_X)$. Ceci est le résultat principal de cette note, analogue, en dimension 3, au calcul principal de [GMS]. En effet, la formule pour $\beta^{(3)}$ écrite dans §3 est la conséquence du calcul du §11.

Les théorèmes principaux de cette note sont: 8.6, 9.5, 10.13 et 11.5. On ne décrit que la stratégie de leurs démonstrations; la vérification est tout à fait directe et exige *plus laboris quam artis.*

Quant à l'idée de base, elle est simple: tout le contenu de cette note est obtenu par "bootstrap". D'abord, tous les complexes se déduisent du complexe de de Rham. Ensuite, le rôle fondamental est joué par l'opérateur $\{,\dots,\}_{\mathfrak{b}} : S^n\mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ défini (pour une base abélienne $\mathfrak{b} = \{\tau_i\} \subset \Gamma(X, \mathcal{T}_X)$) par la formule

$$\{a_1\tau_{i_1}, \dots, a_n\tau_{i_n}\}_{\mathfrak{b}} = \frac{1}{n!}\ \mathrm{Sym}_{1\dots n}\ \tau_{i_n}(a_1)\tau_{i_1}(a_2)\dots\tau_{i_{n-1}}(a_n) \qquad (0.3.1)$$

($a_j \in \mathcal{O}_X,\ \tau_{i_j} \in \mathfrak{b}$.) Tous les cocycles se déduisent de manière essentiellement unique de (0.3.1). Ce phénomène d'unicité pour nous est un mystère.

§1. Complexes tordus

1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Suivant l'usage, un bicomplexe dans $\mathcal{C}$ est un triple $(C^{\cdot\cdot}, d', d'')$, $C^{\cdot\cdot} = \{C^{ij},\ i,j \in \mathbb{Z}\}$ étant une collection d'objets de $\mathcal{C}$ et $d' = \{d'^{\ ij},\ i,j \in \mathbb{Z}\}$, $d'' = \{d''^{\ ij},\ i,j \in \mathbb{Z}\}$, étant des collections de morphismes, où d' a le degré $(1,0)$, i.e.

$$d'^{\ ij} : C^{ij} \longrightarrow C^{i+1,j}$$

et d'' a le degré $(0,1)$, s'est-à-dire,

$$d''^{\ ij} : C^{ij} \longrightarrow C^{i,j+1},$$

qui vérifient les relations

$$d'^{\ 2} = 0,\ d''^{\ 2} = 0,\ d'd'' = d''d'$$

Le complexe simple associé $\mathrm{Tot}(C^{\cdot\cdot})$ est défini par

$$\mathrm{Tot}(C^{\cdot\cdot})^i = \oplus_{p+q=i}\ C^{pq},\ d_{\mathrm{Tot}}(x) = d'x + (-1)^p\ d''x,\ x \in C^{pq}$$

Dans nos applications les bicomplexes seront limités inférieurement, i.e. $C^{ij}=0$ pour $i<i_0$ ou $j<j_0$, donc les sommes directes seront finies.

Exemple typique. Si X est un espace topologique, $\mathcal{F}^{\cdot}$ est un complexe limité inférieurement de faisceaux de groupes abéliens sur X, $\mathfrak{U}=\{U_p\}$ un recouvrement ouvert de X, alors les cochaînes de Čech $\check{C}^j(\mathfrak{U},\mathcal{F}^i)$ forment un bicomplexe.

1.2. Un *bicomplexe tordu* est une collection $C^{\cdot\cdot}$ comme ci-dessus munie de trois endomorphismes d', d'', R, où d' a le degré $(1,0)$, d'' a le degré $(0,1)$ et $R=\{R^{ij}\}$ a le degré $(2,-1)$, i.e.

$$R^{ij}:\ C^{ij}\longrightarrow C^{i+2,j-1}$$

On exige les relations suivantes:

$$d''^{\,2}=0,\ d'd''=d''d',\ d'^{\,2}=Rd''+d''R,\ Rd'=d'R,\ R^2=0 \qquad (1.2.1)$$

Le complexe simple associé est défini par

$$\mathrm{Tot}(C^{\cdot\cdot})^i=\oplus_{p+q=i}\ C^{pq}$$

$$d_{\mathrm{Tot}}(x)=d'x+(-1)^p\ d''x+(-1)^{p+1}Rx,\ x\in C^{pq} \qquad (1.2.2)$$

On vérifie aussitôt que $d^2_{\mathrm{Tot}}=0$.

1.3. De même, un tricomplexe est une collection d'objets $C^{\cdots}=\{C^{pqr},\ p,q,r\in\mathbb{Z}\}$ munie de trois endomorphismes d',d'',d''' de degrés $(1,0,0),(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ respectivement, tels que

$$d'^{\,2}=d''^{\,2}=d'''^{\,2}=0,\ d'd''=d''d',\ d'd'''=d'''d',\ d''d'''=d'''d''$$

Le complexe simple associé est défini par

$$\mathrm{Tot}(C^{\cdots})^i=\oplus_{p+q+r=i}\ C^{pqr},$$

$$d_{\mathrm{Tot}}(x)=d'x+(-1)^pd''x+(-1)^{p+q}d'''x,\ x\in C^{pqr}$$

Définition équivalente: on prend d'abord le complexe simple par rapport aux deux premiers degrés, on obtient le bicomplexe $\mathrm{Tot}_{12}(C^{\cdots})$ et on prend le complexe simple associé à ce bicomplexe $\mathrm{Tot}(\mathrm{Tot}_{12}(C^{\cdots}))$.

1.4. Un *tricomplexe tordu* est une collection $C^{\cdots}$ comme ci-dessus munie de 5 endomorphismes d',d'',d''',R et M de degrés

$$\deg\,d'=(1,0,0),\ \deg\,d''=(0,1,0),\ \deg\,d'''=(0,0,1)$$

$$\deg\,R=(2,-1,0),\ \deg\,M=(1,-1,1)$$

qui vérifient les relations (a), (b) et (c) ci-dessous.

(a) Pour chaque p la collection $(C^{p\cdot\cdot},\ d'',d''')$ est un bicomplexe.

(b) Pour chaque r la collection $(C^{\cdot\cdot r},\ d',d'',R)$ est un bicomplexe tordu.

(c) Les conditions sur M:

$$M^2=0$$

$$d'''d' = d'd''' + Md'' + d''M$$

$$d'''R = Rd''' + Md' + d'M$$

$$d'''M + Md''' = 0,\ RM + MR = 0$$

Le complexe simple associé est défini par

$$\mathrm{Tot}(C^{\cdots})^i = \oplus_{p+q+r=i}\ C^{pqr},$$

$$d_{\mathrm{Tot}}(x) = d'x + (-1)^p d''x + (-1)^{p+q} d'''x + (-1)^{p+1} Rx + (-1)^{q+1} Mx, \quad (1.4.1)$$

$x \in C^{pqr}$. On vérifie que $d_{\mathrm{Tot}}^2 = 0$.

1.5. Chaque objet de $\mathcal{C}$ sera considéré comme un complexe concentré en degré 0.

Rappelons les notations usuelles pour les complexes. Soit C un complexe. Alors sa translation $C[a]$ ($a \in \mathbb{Z}$) est défini par $C[a]^i = C^{a+i},\ d_{C[a]} = (-1)^a\ d_C$.

Tronquations. "Bêtes":

$$\sigma_{\leq a}\ C:\ \ldots \longrightarrow C^{a-1} \longrightarrow C^a \longrightarrow 0$$

$$\sigma_{\geq a}:\ 0 \longrightarrow C^a \longrightarrow C^{a+1} \longrightarrow \ldots$$

"Intelligente":

$$\tau_{\leq a}:\ \ldots \longrightarrow C^{a-2} \longrightarrow C^{a-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}\ d^a \longrightarrow 0$$

Si $f:\ C \longrightarrow D$ est un morphisme de complexes, alors Cone(f) est le complexe simple associé au bicomplexe $C^{\cdot} \xrightarrow{f} D^{\cdot}$, $D^{\cdot}$ ayant le premier degré 0.

§2. Rappels sur le complexe de de Rham

2.1. Désormais on fixe un anneau commutatif de base k et une k-algèbre commutative A. Chaque A-module est un k-module par restriction de scalaires.

On va utiliser les notations suivantes.

$k-Mod$: la catégorie de k-modules; $\otimes := \otimes_k,\ Hom := Hom_k$. Si $M_1, \ldots, M_n, N \in k - Mod$ on identifiera $Hom(M_1 \otimes \ldots \otimes M_n, N)$ avec l'ensemble d'applications k-multilinéaires $M_1 \times \ldots \times M_n \longrightarrow N$. $M^{\otimes n}$ désignera la n-ième puissance tensorielle sur k d'un k-module M.

De même, $Hom(\Lambda^n M, N)$ (resp. $Hom(S^n M, N)$) désignera le k-module des fonctions $f:\ M^n \longrightarrow N$ k-multilinéaires alternées (resp. symétriques) (ceci peut être considéré comme une définition de la puissance exterieure (resp. symétrique). Par définition, $\Lambda^0 M = S^0 M = k$.

Plus généralement, $Hom(\Lambda^n M \otimes S^m M', N)$ désignera le k-module des fonctions $f:\ M^n \times M'^m \longrightarrow N$ k-multilinéaires, alternées par rapport aux premiers n arguments et symétriques par rapport aux derniers m-arguments, etc.

Si $M_1, \ldots, M_n, N \in A{-}Mod$, $Hom_A(\Lambda^n_A M, N)$ (resp. $Hom_A(S^n_A M, N)$) désignera le A-module des fonctions $f:\ M^n \longrightarrow N$ A-multilinéaires alternées (resp. symétriques).

2.2. Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie. $\mathfrak{g}-Mod$ va désigner la catégorie de $\mathfrak{g}$-modules.

Si $M, N \in \mathfrak{g} - Mod$, alors $M \otimes N$, $M^{\otimes n}$, $\Lambda^n M$, $S^n M$ sont des $\mathfrak{g}$-modules sur lequels $\mathfrak{g}$ agit par la règle de Leibniz, par exemple,

$$\tau(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes \tau x_i \otimes \ldots \otimes x_n, \tag{2.2.1}$$

etc.

De plus, $Hom(M, N)$ est aussi un $\mathfrak{g}$-module; ici $\mathfrak{g}$ agit par la règle

$$(\tau(f))(x) = \tau(f(x)) - f(\tau(x)),\ f \in Hom(M, N) \tag{2.2.2}$$

On utilisera aussi les notations τf et $\mathrm{Lie}_\tau f$ pour $\tau(f)$.

Il en découle que si $M_1, \ldots, M_n,\ N$ sont de $\mathfrak{g}$-modules, alors $Hom(M_1 \otimes \ldots \otimes M_n, N)$ sera un $\mathfrak{g}$-module, etc.

Le *complexe de cochaînes de Chevalley* de $\mathfrak{g}$ à coéfficients dans M, $C^{\cdot}(\mathfrak{g}, M)$, est défini par $C^n(\mathfrak{g}, M) = Hom(\Lambda^n \mathfrak{g}, M)$, $n \geq 0$, la différentielle de Chevalley $d_{Ch}:\ C^{n-1}(\mathfrak{g}, M) \longrightarrow C^n(\mathfrak{g}, M)$ agit par la formule

$$d_{Ch} f(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} f([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots, \tau_n) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+1}\ \tau_i f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \tau_n) \tag{2.2.3}$$

Attention: $\tau_i f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \tau_n)$ désigne $\tau_i(f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \tau_n))$!

2.3. Rappelons qu'une A-*algébroïde de Lie* est une k-algèbre de Lie T agissant sur A par dérivations k-linéaires, munie d'une structure d'un A-module à gauche, telle que

$$[\tau, a\tau'] = a[\tau, \tau'] + \tau(a)\tau'$$

$(a \in A,\ \tau, \tau' \in T)$.

Exemple typique. $T = \mathrm{Der}_k(A)$ (algèbre de Lie de dérivations k-linéaires $\tau:\ A \longrightarrow A$).

Désormais nous fixons une A-algébroïde Lie T. On désigne par T^{Lie} le même T considérée comme une algèbre de Lie, avec la structure d'une algébroïde de Lie oubliée.

On pose $\Omega = Hom_A(T, A)$; ceci est un A-module. Des éléments de T (resp. de Ω) seront notés τ, τ' (resp. ω), etc.; des éléments de A seront notés a, b, c.

On désigne par $\langle , \rangle :\ T \times \Omega \longrightarrow A$ l'accouplement A-bilinéaire canonique. On a la A-dérivation canonique $d:\ A \longrightarrow \Omega$ définie par

$$\langle \tau, da \rangle = \tau(a)$$

De plus, T^{Lie} opère sur Ω par la règle

$$\langle \tau', \tau(\omega)\rangle = \tau(\langle \tau', \omega\rangle) - \langle [\tau, \tau'], \omega\rangle$$

$(\tau, \tau' \in T,\ \omega \in \Omega)$. Cette action vérifie les propriétés

$$\tau(a\omega) = \tau(a)\omega + a\tau(\omega)$$

$$(a\tau)(\omega) = a\tau(\omega) + \langle \tau, \omega\rangle\ da$$

La flèche d est un morphisme de T^{Lie}-modules.

2.4. *Complexe de Chevalley - de Rham.* Définissons les A-modules $\Omega^n := Hom_A(\Lambda^n_A T, A)$ $(n \geq 0)$. En particulier, $\Omega^0 = A, \Omega^1 = \Omega$.

Les opérations fondamentales suivantes agissent sur ces modules.

Convolution avec un champ vectoriel. Pour $\tau \in T$, l'opérateur $i_\tau = \langle \tau, ?\rangle :$ $\Omega^{n+1} \longrightarrow \Omega^n$ est défini par

$$i_\tau\omega(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \omega(\tau, \tau_1, \ldots, \tau_n)$$

Il en suit que pour $\omega \in \Omega^n$

$$\omega(\tau_1, \ldots, \tau_n) = i_{\tau_n} i_{\tau_{n-1}} \ldots i_{\tau_1}\omega$$

Évidemment,

$$i_\tau i_{\tau'} = -i_{\tau'} i_\tau, \text{ ou bien } [i_\tau, i_{\tau'}] = 0;\ i_\tau^2 = 0$$

Dérivée de Lie $\mathrm{Lie}_\tau :\ \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ est définie par

$$\mathrm{Lie}_\tau\omega(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \tau(\omega(\tau_1, \ldots, \tau_n)) - \sum_i \omega(\tau_1, \ldots, [\tau, \tau_i], \ldots, \tau_n)$$

En d'autres termes, T^{Lie} agit sur $C^n(T, A) = Hom(\Lambda^n T, A)$ par les regles (2.2.1), (2.2.2) et cette action respecte le sous-module Ω^n.

On désignera $Lie_\tau\omega$ aussi par $\tau(\omega)$ ou simplement par $\tau\omega$.

On a

$$\mathrm{Lie}_\tau \circ i_{\tau'} = i_{[\tau,\tau']} + i_{\tau'} \circ \mathrm{Lie}_\tau, \text{ ou bien } [\mathrm{Lie}_\tau, i_{\tau'}] = i_{[\tau,\tau']}$$

Différentielle de Chevalley - de Rham. Par recurrence sur n on établit sans peine qu'il existe l'unique collection d'opérateurs $d :\ \Omega^n \longrightarrow \Omega^{n+1}$ qui satisfont à l'identité

$$i_\tau \circ d + d \circ i_\tau = \mathrm{Lie}_\tau, \text{ ou bien } [i_\tau, d] = \mathrm{Lie}_\tau$$

Pour $n = 0$, d a été déjà défini dans 2.3. On a $d^2 = 0$.

La formule explicite sera

$$d\omega(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots) +$$

$$+\sum_i (-1)^{i+1}\tau_i\omega(\tau_1,\ldots,\hat{\tau}_i,\ldots)$$

Autrement dit, la différentielle de Chevalley (2.2.3) respecte les sous-modules $\Omega^n \subset C^n(T,A)$, donc le complexe de de Rham $(\Omega^{\cdot},d)$ est un sous-somplexe du complexe de Chevalley $C^{\cdot}(T,A)$. On utilise la notation $\Omega^{p,\mathrm{fer}} := \mathrm{Ker}\ (d:\ \Omega^p \longrightarrow \Omega^{p+1})$.

On a $[d,\mathrm{Lie}_\tau]=0$.

2.5. *Multiplication.* Il existe l'unique multiplication $\Omega^{\cdot}\times\Omega^{\cdot}\longrightarrow\Omega^{\cdot},\ (\omega,\omega')\mapsto\omega\omega',\ \Omega^p\Omega^q\subset\Omega^{p+q}$ qui vérifie la propriété

$$i_\tau(\omega\omega') = i_\tau(\omega)\omega' + (-1)^p\omega i_\tau(\omega')\quad(\omega\in\Omega^p)$$

En effet, cette règle implique la formule explicite "shuffle" évidente. Soient $\omega\in\Omega^p,\ \omega'\in\Omega^q$; désignons par $\mathcal{P}_{pq}$ l'ensemble de sous-ensembles $P\subset[1,p+q]:=\{1,\ldots,p+q\}$ de cardinalité p. Pour $P=\{i_1,\ldots,i_p\},\ i_1<\ldots<i_p$, posons $P'=[1,p+q]-P=\{j_1,\ldots,j_q\}$. On désigne par $\mathrm{sgn}(P)\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le signe de la permutation $\{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q\}$. Dans ces notations

$$\omega\omega'(\tau_1,\ldots,\tau_{p+q}) = \sum_{P\in\mathcal{P}_{pq}}(-1)^{\mathrm{sgn}(P)}\omega(\tau_P)\omega'(\tau_{P'}),$$

où $\omega(\tau_P)$ désigne $\omega(\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_p})$.

La composante de degré $(0,p)$ correspond à la structure d'un A-module sur Ω^p et $(\Omega^{\cdot},d)$ devient une algèbre différentielle graduée associative et commutative.

§3. Formes de Chern - Simons

3.1. Fixons un entier $n\geq 1$. Pour chaque algèbre B on désigne par $\mathrm{Mat}_n(B)$ l'algèbre de matrices $n\times n$ à coéfficients dans B.

Par exemple, considérons $\mathrm{Mat}_n(\Omega^{\cdot})$. Ceci est une algèbre différentielle graduée associative (cf. 2.5); la graduation est définie par $\mathrm{Mat}_n(\Omega^{\cdot})^i = \mathrm{Mat}_n(\Omega^i)$. Pour $P\in\mathrm{Mat}_n(\Omega^i)$ on pose $|P|:=i$.

Notre algèbre est munie de la fonction trace $tr:\ \mathrm{Mat}_n(\Omega^{\cdot})\longrightarrow\Omega^{\cdot}$ qui commute avec la différentielle et satisfait à la propriété fondamentale

$$tr(PQ) = (-1)^{|P||Q|}tr(QP) \tag{3.1.1}$$

Par contre, on uitilisera parfois la notation usuelle pour le commutateur, $[P,Q]=PQ-(-1)^{|P||Q|}QP$, d'où (3.1.1) se recrit comme $tr([P,Q])=0$.

On rémarque aussi que

$$tr(P^2) = 0 \text{ si } |P| \text{ est impair} \tag{3.1.2}$$

Biensûr, ceci est une consequence de (3.1.1) ci $1/2\in k$, mais c'est vrai toujours.

Le groupe $GL_n(\Omega^{\cdot})$ opère sur $\mathrm{Mat}_n(\Omega^{\cdot})$ par conjugaison; on n'utilisera que l'action du sous-groupe $GL_n(A)$, avec la notation

$$P^{\phi} = \phi^{-1} P \phi \quad (\phi \in GL_n(A))$$

Évidemment, $tr(P^{\phi}) = tr(P)$.

3.2. Pour $\phi \in GL_n(A)$ on a

$$d(\phi^{-1}) = -\phi^{-1} d\phi\ \phi^{-1} \ \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^1)$$

On introduit la notation

$$\ell(\phi) := \phi^{-1} d\phi \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^1) \tag{3.2.1}$$

On a

$$d\ell(\phi) = -\ell(\phi)^2$$

Donc la forme $tr\{\ell(\phi)\}$ est fermée,

$$dtr\{\ell(\phi)\} = -tr\{\ell(\phi)^2\} = 0 \tag{3.2.2}$$

grace à (3.1.2).

Ensuite,

$$d(P^{\phi}) = -[\ell(\phi), P] + (dP)^{\phi} \quad (P \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^{\cdot}))$$

3.3. D'un autre côté,

$$\ell(\psi\phi) = \ell(\psi)^{\phi} + \ell(\phi) \tag{3.3.1}$$

pour $\psi, \phi \in GL_n(A)$, d'où

$$tr\{\ell(\psi\phi)\} = tr\{\ell(\psi)\} + tr\{\ell(\phi)\} \tag{3.3.2}$$

3.4. *Bicomplexe de Čech - de Rham.* Supposons qu'un groupe G opère à droit sur un groupe abélien M; on utilise la notation exponentielle: x^g $x \in M, g \in G$. Rappelons que le complexe de cochaînes $C^{\cdot}(G, M)$ est défini par $C^n(G, M) = Hom_{\mathcal{E}ns}(G^n, M)$, avec la différentielle, dit *de Čech* ,

$$d_c f(g_1, \ldots, g_{n+1}) = f(g_2, \ldots, g_{n+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n)^{g_{n+1}}$$

Par exemple, (3.3.1) signifie que ℓ est un 1-cocycle de $GL_n(A)$ à coéfficients dans $Mat_n(\Omega^1)$ et (3.3.2) et (3.2.1) signifient que

$$tr\{\ell\} \in Z^1(GL_n(A), \Omega^{1,\mathrm{fer}}) = H^1(GL_n(A), \Omega^{1,\mathrm{fer}}) = Hom_{Groupes}(GL_n(A), \Omega^{1,\mathrm{fer}})$$

(l'action de $GL_n(A)$ sur $\Omega^{1,\mathrm{fer}}$ étant triviale).

Considérons le complexe de de Rham $\Omega^{\cdot}$ comme muni de l'action triviale de $GL_n(A)$. Le complexe de cochaînes $C^{\cdot}(GL_n, \Omega^{\cdot})$ devient un bicomplexe avec les *colonnes* $C^{\cdot}(GL_n(A), \Omega^i)$, donc la première differentielle sera de de Rham et la seconde celle de Čech.

3.5. *Complexes de Chern - Simons.* Pour $i \geq 1$ considérons les complexes

$$\Omega^{[i,2i-1\rangle} := \tau_{\leq 2i-1}\sigma_{\geq i}\Omega^{\cdot}[i] : \ \Omega^i \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega^{2i-1,\text{fer}}$$

Le i-ième bicomplexe de Chern - Simons $CS(i)^{\cdot\cdot}$ est le bicomplexe $C^{\cdot}(GL_n(A), \Omega^{[i,2i-1\rangle})$ dont le première degré est le degré dans $\Omega^{[i,2i-1\rangle}$.

Le i-ième complexe de Chern - Simons $CS(i)$ est le complexe simple associé

$$CS(i) = \text{Tot } CS(i)^{\cdot\cdot}$$

Par exemple, $CS(1) = C^{\cdot}(GL_n(A), \Omega^{1,\text{fer}})$. On a $tr\{\ell\} \in CS(1)^{01}$ et $d_c(tr\{\ell\}) = 0$, i.e.

$$tr\{\ell\} \in Z^1(CS(1)) \tag{3.5.1}$$

On appelle l'élément (3.5.1) *la première forme de Chern - Simons* et l'on désigne par β_1.

On définira ci-dessous des cocycles analogues $\beta_i \in Z^i(CS(i))$ pour $i = 2, 3$.

Deuxième forme

3.6. Posons, *der Kurzen wegen*, $a := \ell(\phi)$. On vérifie par recurrence que

$$d(a^{2i-1}) = -a^{2i}; \ d(a^{2i}) = 0$$

Supposons que 2 est inversible dans k. Alors $a^{2i} = \frac{1}{2}[a, a^{2i-1}]$, d'où $tr\{a^{2i}\} = 0$. (D'ailleurs, ceci est vrai sans hypothèse que $1/2 \in k$; nous n'aurons pas besoin de cela.) Donc

$$tr\{a^{2i-1}\} \in \Omega^{2i-1,\text{fer}}$$

Soit $\psi \in GL_n(A)$. Posons $b := \ell(\psi)^{\phi}$. On a

$$db = -[a, b] - b^2 = -(ab + ba + b^2),$$

d'où

$$d(ba) = -aba - b^2a$$

et

$$dtr\{ba\} = -tr\{a^2b + ab^2\}$$

3.7. De l'autre part, rappelons que $d_c f(\psi, \phi) = f(\phi) - f(\psi\phi) + f(\psi)^{\phi}$, donc

$$d_c a^3(\psi, \phi) = a^3 - (a + b)^3 + b^3 =$$

$$= -(a^2b + aba + ab^2 + ba^2 + bab + b^2a),$$

d'où

$$d_c tr(a^3) = -3tr\{a^2b + ab^2\} = 3dtr(ba)$$

Enfin, soit $\chi \in CL_n(A)$. Posons $c := \ell(\chi)^{\psi\phi}$. Alors on aura

$$d_c(ba)(\chi, \psi, \phi) = ba - (b+c)a + c(a+b) - cb = 0$$

3.8. Supposons que 6 est inversible dans k. Définissons les formes: $\beta^{11} \in C^1(G, \Omega^{3,\text{fer}}) = CS(2)^{11}$ par

$$\beta^{11}(\phi) = \frac{1}{6} tr\{\ell(\phi)^3\}$$

et $\beta^{02} \in C^2(G, \Omega^2) = CS(2)^{02}$ par

$$\beta^{02}(\psi, \phi) = \frac{1}{2} tr\{\ell(\psi)^\phi \ell(\phi)\}$$

Alors on a montré que $d_c\beta^{02} = 0$ et $d\beta^{02} = d_c\beta^{11}$. Donc l'élément $\beta_2 = (\beta^{02}, \beta^{11})$ est un 2-cocycle dans $CS(2)$. Nous l'appelons *la deuxième forme de Chern - Simons.*

Troisième forme

3.9. Ici nous supposons que 30 est inversible dans k. On a $tr\{\ell(\phi)^5\} = 0$. Considérons la forme $tr\{\ell^5\} \in Hom(GL_n(A), \Omega^{5,\text{fer}}) = CS(3)^{21}$. On a

$$d_c tr\{\ell^5\}(\psi, \phi) = tr\{b^5 - (a+b)^5 + a^5\} =$$

$$= -5tr\{ba^4 + b^2a^3 + b^4a + b^3a^2 + baba^2 + b^2aba\}$$

On définit

$$\beta^{21} := -\frac{1}{60} tr\{\ell^5\} \in Hom(GL_n(A), \Omega^{5,\text{fer}}) = CS(3)^{21},$$

3.10. D'un autre côté, on introduit une forme $\beta^{12} \in Hom(GL_n(A)^2, \Omega^4) = CS(3)^{12}$ par

$$\beta^{12}(\psi, \phi) := -\frac{1}{12} tr\{ba^3\} - \frac{1}{12} tr\{b^3a\} - \frac{1}{24} tr\{baba\} + \frac{1}{12} tr\{b^2a^2\} =$$

$$= \beta' + \beta'' + \beta''' + \beta''''$$

Alors on a

$$d\beta' = \frac{1}{12} tr\{ba^4 + b^2a^3\}$$

$$d\beta'' = \frac{1}{12} tr\{b^4a + b^3a^2\}$$

$$d\beta''' = \frac{1}{12} tr\{baba^2 + b^2aba\}$$

et $d\beta'''' = 0$. En ajoutant,

$$d\beta^{12}(\psi,\phi) = \frac{1}{12} tr\{ba^4 + b^2a^3 + b^4a + b^3a^2 + baba^2 + b^2aba\} = -d_c\beta^{21}$$

3.11. Enfin, on définit la forme $\beta^{03} \in Hom(GL_n(A)^3, \Omega^3) = CS(3)^{03}$ par

$$\beta^{03}(\chi,\psi,\phi) = \frac{1}{6} tr\{\ell(\chi)^{\psi\phi}\ell(\psi)^{\phi}\ell(\phi)\} = \frac{1}{6} tr\{cba\}$$

On voit aussitôt que $d_c(cba) = 0$, donc $d_c\beta^{03} = 0$.

D'autre part,

$$dc = -ac - bc - c^2 - cb - ca,$$

d'où

$$d(cba) = -(a+b+c)cba$$

Par contre, calculons

$$d_c\beta^{12}(\chi,\psi,\phi) = \beta^{12}(\psi,\phi) - \beta^{12}(\chi\psi,\phi) + \beta^{12}(\chi,\psi\phi) - \beta^{12}(\chi,\psi)$$

On trouve

$$d_c\beta' = -\frac{1}{12}\ tr\{cb^2a + cab^2 + cba^2 + ca^2b + caba + cbab\}$$

$$d_c\beta'' = \frac{1}{12}\ tr\{c^2ba - c^2ab + cb^2a + cab^2 + cbca - cbab\}$$

$$d_c\beta''' = \frac{1}{12}\ tr\{caba - cacb\}$$

et

$$d_c\beta''' = \frac{1}{12}\ tr\{-cba^2 - bca^2 + c^2ba + c^2ab\}$$

En ajoutant, on obtient

$$d_c\beta^{12}(\chi,\psi,\phi) = \frac{1}{6}\ tr\{c^2ba - cbab - cba^2\} = \frac{1}{6}\ tr\{(a+b+c)cba\} = -d\beta^{03}(\chi,\psi,\phi)$$

Il en suit

3.12. Théorème. L'èlément $\beta_3 = (\beta^{03}, \beta^{12}, \beta^{21}) \in CS(3)^3$ est un cocycle.

On l'appele *la troisième forme de Chern - Simons.*

§4. Bicomplexe de Hochschild - de Rham

4.1. Soit M, N deux A-modules. On peut plonger le module $Hom_A(M,N)$ dans le module de homomorphismes k-linéaires $Hom(M,N)$; évidemment,

$$Hom_A(M,N) = \mathrm{Ker}(d_H:\ Hom(M,N) \longrightarrow Hom(A \otimes M, N)),$$

où la flèche d_H est définie par

$$d_H f(a,x) = af(x) - f(ax)$$

$(x \in M, a \in A)$.

Plus généralement, définissons le complexe de Hochschild $C_H^{\cdot}(M,N)$ par $C_H^n(M,N) = Hom(A^{\otimes n-1} \otimes M, N)$ $(n \geq 0)$, la différentielle $d_H:\ C_H^n(M,N) \longrightarrow C_H^{n+1}(M,N)$ agit par la formule

$$d_H f(a_1, \ldots, a_n; x) = a_1 f(a_2, \ldots, a_n; x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n; x) + (-1)^n f(a_2, \ldots, a_{n-1}; a_n x)$$

4.2. Définissons un complexe augmenté de A-modules

$$B_A^{\cdot}(M) \xrightarrow{e} M \tag{4.2.1}$$

où $B_A^{-n}(M) = A^{\otimes n+1} \otimes M$ $(n \geq 0)$, la structure d'un A-module sur $B_A^{-n}(M)$ étant définie par

$$a(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \otimes x) = aa_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \otimes x,$$

la différentielle $d_H:\ B_A^{-n}(M) \longrightarrow B_A^{-n+1}(M)$ agissant par

$$d_H(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \otimes x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \ldots a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1} \otimes x +$$

$$+ (-1)^n a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_{n+1} x$$

et l'augmentation e étant définie par $e(a \otimes x) = ax$.

Il est facile de voir que (4.2.1) est une résolution (on construit sans peine une homotopie).

Il découle de définitions que

$$C_H^{\cdot}(M,N) = Hom_A(B_A^{\cdot}(M), N)$$

En pratique (sous les hypothèses faibles sur A) les A-modules $B_A^n(M)$ seront projectifs, donc

$$H^n(C^{\cdot}(M,N)) = Ext_A^n(M,N)\ (n \geq 0)$$

Donc si M est projectif sur A, $C^{\cdot}(M,N)$ sera une résolution de $Hom_A(M,N)$.

4.3. Maintenant on applique cette construction à $\Omega = Hom_A(T, A)$. On obtient le complexe de Hochschild

$$C^{\cdot}_H(T, A): \ Hom(T, A) \longrightarrow Hom(A \otimes T, A) \longrightarrow \dots$$

On va noter ce complexe $\mathcal{HR}(1)^{0\cdot}$, et cela sera la 0-ième colonne du *bicomplexe de Hochschild - de Rham.*

Plus généralement, définissons pour $i \geq 1$ les complexes analogues $\mathcal{HR}(1)^{i\cdot}$. Posons $\mathcal{HR}(1)^{i0} = Hom(\Lambda^{i+1}T, A)$. On rémarque que l'on a l'inclusion évidente

$$\Omega^{i+1} = Hom_A(\Lambda^{i+1}_A T, A) \hookrightarrow \mathcal{HR}(1)^{i0}$$

Ensuite, posons

$$\mathcal{HR}(1)^{ij} = Hom(A^{\otimes j} \otimes T \otimes \Lambda^i T, A) \quad (j \geq 1);$$

les différentielles de Hochschild seront definies par la formule 4.1 *par rapport au premier argument*:

$$d_H f(a_1, \dots, a_j; \tau_1; \tau_2, \dots, \tau_i) = a_1 f(a_2, \dots, a_j; \tau_1; \tau_2, \dots, \tau_i) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{j-1} (-1)^p f(a_1, \dots, a_p a_{p+1}, \dots, a_j; \tau_1; \tau_2, \dots, \tau_i) +$$

$$+ (-1)^j f(a_1, \dots, a_{j-1}; a_j \tau_1; \tau_2, \dots, \tau_i)$$

Le complexe $\mathcal{HR}(1)^{i\cdot}$ sera la i-ième colonne de notre bicomplexe de Hochschild - de Rham.

4.4. Il nous reste à définir les flèches horisontales $d_{DR}: \ \mathcal{HR}(1)^{i\cdot} \longrightarrow \mathcal{HR}(1)^{i+1\cdot}$.

D'abord la 0-ième ligne

$$\mathcal{HR}(1)^{\cdot 0}: \ Hom(T, A) \longrightarrow Hom(\Lambda^2 T, A) \longrightarrow \dots$$

La différentielle ici sera $-d_{Ch}$, où d_{Ch} est la différentielle de Chevalley dans $C^{\cdot}(T^{Lie}, A)$, (2.2.3).

Par contre, pour $j \geq 1$ la j-ième ligne sera

$$\mathcal{HR}(1)^{\cdot j}: \ Hom(A^{\otimes j} \otimes T, A) \longrightarrow Hom(A^{\otimes j} \otimes T \otimes T, A) \longrightarrow Hom(A^{\otimes j} \otimes T \otimes \Lambda^2 T, A) \longrightarrow \dots$$

Identifions $Hom(A^{\otimes j} \otimes T \otimes \Lambda^i T, A)$ avec $Hom(\Lambda^i T, Hom(A^{\otimes j} \otimes T, A))$ et définissons la différentielle de de Rham comme la différentielle de Chevalley dans

$C^{\cdot}(T^{Lie}, Hom(A^{\otimes j} \otimes T, A))$, où l'action de T^{Lie} sur $Hom(A^{\otimes j} \otimes T, A)$ est définie en accordance avec la règle usuelle (cf. 2.2):

$$(\tau f)(a_1, \dots, a_j; \tau') = \tau f(a_1, \dots, a_j; \tau') - \sum_p f(a_1, \dots, \tau(a_p), \dots; \tau') - f(a_1, \dots, a_j; [\tau, \tau'])$$

Donc

$$d_{DR}f(a_1,\dots,a_j;\tau;\tau_1,\dots)=\sum_p(-1)^{p+1}\{\tau_p f(a_1,\dots;\tau;\dots,\hat{\tau}_p,\dots)-$$

$$-\sum_r f(a_1,\dots,\tau_p(a_r),\dots;\tau;\dots,\hat{\tau}_p,\dots)-f(a_1,\dots;[\tau_p,\tau];\dots,\hat{\tau}_p,\dots)\}+$$

$$+\sum_{p<q}(-1)^{p+q}f(a_1,\dots;\tau;\dots,\hat{\tau}_p,\dots,\hat{\tau}_q,\dots)$$

On vérifie par un calcul direct que $d^0_H d_{Ch}=-d_{Ch}d^0_H$ (sic!), d'où $d^0_H d_{DR}=d_{DR}d^0_H$.

D'autre part, on vérifie

4.5. *Lemme.* Les Hochschilds

$$d_H:\ Hom(A^{\otimes j}\otimes T,A)\longrightarrow Hom(A^{\otimes j+1}\otimes T,A)$$

sont des morphismes de T^{Lie}-modules.

4.6. Il en suit que $d^j_H d_{DR}=d_{DR}d^j_H$ pour $j\geq 1$. Ceci donne le bicomplexe de Hochschild - de Rham $\mathcal{HR}(1)^{\cdot\cdot}$ promis. Le complexe de Hochschild - de Rham est le complexe simple associé: $\mathcal{HR}(1)=\mathrm{Tot}\ \mathcal{HR}(1)^{\cdot\cdot}$.

On a l'inclusion canonique

$$\sigma_{\geq 1}\Omega^{\cdot}[1]\hookrightarrow\mathcal{HR}(1) \qquad (4.6.1)$$

Évidemment, $\Omega^1=\mathrm{Ker}(d^0_H:\ \mathcal{HR}(1)^{00}\longrightarrow\mathcal{HR}(1)^{01})$, donc (4.6.1) induit un isomorphisme sur H^0:

$$H^0(\mathcal{HR}(1))=\Omega^{1,\mathrm{fer}}$$

§5. Structures de Calabi - Yau

5.1. *Cocycle ϵ_1.* Considérons l'élément "evaluation" $e\in Hom(A\otimes T,A)=\mathcal{HR}(1)^{01}$ défini par

$$e(a;\tau)=\tau(a)$$

Lemme. $d_He=d_{DR}e=0$.

En effet,

$$d_He(a,b;\tau)=ae(b;\tau)-e(ab;\tau)+e(a;b\tau)=$$

$$=a\tau(b)-\tau(ab)+b\tau(a)=0$$

D'autre part,

$$d_{DR}e(a;\tau,\tau')=(\tau'e)(a;\tau)=\tau'e(a;\tau)-e(\tau'(a);\tau)-e(a;[\tau',\tau])=$$

$$=\tau'\tau(a)-\tau\tau'(a)-[\tau',\tau](a)=0$$

(autrement dir, l'opérateur e est invariant).

Il en suit que $\epsilon_1 = (-e, 0) \in \mathcal{HR}(1)^{01} \oplus \mathcal{HR}(1)^{10} = \mathcal{HR}(1)^1$ est un cocycle.

5.2. *Une structure de Calabi - Yau sur T* est un élément $c \in \mathcal{HR}(1)^0 = Hom(T, A)$ tel que $d_{\mathcal{HR}}c = \epsilon_1$.

Ceci signifie que

(CY1) $d_H c = -e$, c'est-à-dire, $c(a\tau) - ac(\tau) = \tau(a)$,

et

(CY2) $d_{DR}c = 0$, c'est-à-dire, $c([\tau, \tau']) - \tau c(\tau') + \tau' c(\tau) = 0$.

Par exemple, si A est lisse sur k et $T = Der_k(A)$, alors une structure de CY sur T est la même chose qu'une structure d'un $\mathcal{D}$-module *à droite* sur A (définie par la règle $1 \cdot \tau = -c(\tau)$), cf. [GMS], §11, et ceci est la même chose qu'une connexion intégrable sur $\det T$, d'où le nom.

On désigne par $\mathcal{CY}$ l'ensemble de structures de CY sur T. Évidemment, celui-ci est un torseur sous le groupe abélien $H^0(\mathcal{HR}(1)) = \Omega^{1,\text{fer}}$. On va calculer sa classe.

5.3. Supposons que deux conditions (a) et (b) sont vérifiées.

(a) T est un A-module libre de rang fini n.

Une base $\mathfrak{b} = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ comme un A-module est appelée *abélienne* si $[\tau_i, \tau_j] = 0$ pour tous i, j.

(b) T admèt une base abélienne.

En effet, l'hypothèse (b) est superflue: sans doute tous les résultats du présent papier restent vrais sans supposant (b). Par contre, elle simplifie énormement les calculs et est suffisante pour les applications: en pratique elle est toujours vérifiée. Donc nous supposons désormais que (b) est vérifiée.

On désigne par $\mathfrak{B}$ l'ensemble de bases abéliennes de T.

5.4. *Formules utiles.* Soit $\mathfrak{b} = \{\tau_i\}$, $\mathfrak{b}' = \{\tau_i'\} \in \mathfrak{B}$. où $\tau_i' = \phi^{ij}\tau_j$, $\phi^{ij} \in A$ (la sommation par les indices répétes est sous-entendue). On ecrit $\mathfrak{b}' = \phi\mathfrak{b}$, $\phi = (\phi^{ij}) \in GL_n(A)$.

On aura

$$0 = [\tau_i', \tau_j'] = [\phi^{ip}\tau_p, \phi^{jq}\tau_q] = \phi^{ip}\tau_p(\phi^{jq})\tau_q - \phi^{jq}\tau_q(\phi^{ip})\tau_p = \tau_i'(\phi^{jq})\tau_q - \tau_j'(\phi^{ip})\tau_p,$$

d'où

$$\tau_i'(\phi^{jp}) = \tau_j'(\phi^{ip})$$

pour tous i, j, p. Donc

$$\tau_a(\phi^{bc}) = \phi^{-1ap}\tau_p'(\phi^{bc}) = \phi^{-1ap}\tau_b'(\phi^{pc}) = [\phi^{-1}\tau_b'(\phi)]^{ac}$$

On utilisera les notations $\ell_i'(\phi) = \phi^{-1}\tau_i'(\phi)$, etc.:

$$\tau_a(\phi^{bc}) = \ell_b'(\phi)^{ac} \tag{5.4.1}$$

$$\tau_a(\phi^{ba}) = tr\{\ell'_b(\phi)\} \tag{5.4.2}$$

5.5. Pour un $\mathfrak{b} = \{\tau_i\} \in \mathfrak{B}$ il existe une seule structure de CY $c_{\mathfrak{b}}$ telle que $c_{\mathfrak{b}}(\tau_i) = 0$ pour chaque i. On a

$$c_{\mathfrak{b}}(a\tau_i) = \tau_i(a)$$

Soit $\mathfrak{b}' = \{\tau'_i\}$ une autre base abélienne, $\mathfrak{b}' = \phi\mathfrak{b}$. Calculons la différence $c_{\mathfrak{b}'} - c_{\mathfrak{b}} \in \Omega^{1,\mathrm{fer}} \subset Hom(T, A)$. On a

$$c_{\mathfrak{b}'}(\tau'_i) - c_{\mathfrak{b}}(\tau'_i) = -c_{\mathfrak{b}}(\tau'_i) = -c_{\mathfrak{b}}(\phi^{ip}\tau_p) = -\tau_p(\phi^{ip}) = -tr\{\ell'_i(\phi)\} = -\langle\tau'_i, \ell(\phi)\rangle,$$

i.e.

$$c_{\mathfrak{b}'} - c_{\mathfrak{b}} = -\ell(\phi)$$

5.6. *Complexe de Čech - Hochschild - de Rham.* Soit X un groupe abélien. On définit le complexe de Čech à coéfficients dans X, $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B}; X)$ par $\check{\mathrm{C}}^i(\mathfrak{B}; X) := Hom_{\mathcal{E}ns}(\mathfrak{B}^{i+1}, X)$ $(i \geq 0)$. Des éléments de $\check{\mathrm{C}}^i(\mathfrak{B}; X)$ seront notés $f = \{f_{\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\ldots\mathfrak{b}_i}\}$. La différentielle agit comme

$$(d_c f)_{\mathfrak{b}_0\ldots\mathfrak{b}_{i+1}} = \sum_{p=0}^{i+1} (-1)^p f_{\mathfrak{b}_0\ldots\hat{\mathfrak{b}}_p\ldots\mathfrak{b}_{i+1}}$$

Le morphisme d'augmentation $\delta :\ X \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^0(\mathfrak{B}; X)$ est défini par $(\delta x)_{\mathfrak{b}} = x$ $(x \in X)$.

Ensuite, on a le morphisme canonique

$$\nu :\ C^{\cdot}(GL_n(A), X) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B}; X) \tag{5.6.1}$$

(où $GL_n(A)$ agit trivialement sur X) défini par

$$(\nu f)_{\mathfrak{b}_0\mathfrak{b}_1\ldots\mathfrak{b}_i} = f(g_i, g_{i-1}, \ldots, g_1), \quad \text{où } \mathfrak{b}_i = g_i\mathfrak{b}_{i-1}$$

Considérons le bicomplexe de Hochschild - de Rham $\mathcal{HR}(1)^{\cdot\cdot}$. En appliquant $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B}; ?)$ on obtient: le tricomplexe $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1)^{\cdot\cdot})$ (avec les différentielles: la première - de de Rham, la seconde - de Hochschild et la troisième - de Čech), le bicomplexe $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1)^{\cdot})$ et le complexe simple noté $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1))$, donc par définition

$$\check{\mathrm{C}}^i(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1)) = \oplus_{s+r=i}\ \check{\mathrm{C}}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1)^s) = \oplus_{p+q+r=i}\ \check{\mathrm{C}}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1)^{pq})$$

On a le morphisme d'augmentation

$$\delta :\ \mathcal{HR}(1) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1))$$

D'autre part, les inclusions $\Omega^{1,\mathrm{fer}} \hookrightarrow \Omega^1 \hookrightarrow Hom(T, A) = \mathcal{HR}(1)^{00}$ fournissent le morphisme de complexes

$$\Omega^{1,\mathrm{fer}} \longrightarrow \mathcal{HR}(1)$$

qui induit, à l'aide de ν (5.6.1), le morphisme de complexes

$$\mu : \ CS(1) = C^{\cdot}(GL_n(A), \Omega^{1,\mathrm{fer}}) \longrightarrow \check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1)),$$

d'où la flèche

$$(\mu, \delta) : \ CS(1) \oplus \mathcal{HR}(1) \longrightarrow \check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1))$$

On appele *le premier complexe de Chern - Simons étendu* le cône

$$\hat{CS}(1) := \mathrm{Cone}(\mu, \delta)[-1] \tag{5.6.2}$$

Évidemment, on a la projection canonique

$$\pi : \ \hat{CS}(1) \longrightarrow CS(1)$$

Les calculs précédents sont résumés en

5.7. Théorème. Considérons la collection $c_1 = \{c_{\mathfrak{b}}\}_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}}$ comme un élément de $\check{C}^0(\mathfrak{B}; \mathcal{HR}(1)^{00})$. Alors $d_H c_1 = \epsilon_1$ et $d_c c_1 = -\beta_1$.

Donc l'élément $\hat{\beta}_1 = (\beta_1, -\epsilon_1, -c_1)$ est un 1-cocycle de $\hat{CS}(1)$ tel que $\pi(\hat{\beta}_1) = \beta_1$.

On appelera cet élément *le premier cocycle de Chern - Simons raffiné.*

§6. Deuxième Hochschild - Koszul - de Rham

6.1. Dans cette section on réproduit la construction de [S], Caput Secundum. Pour les détails de calculs, voir *op. cit.*

Considérons Ω^2 comme un sous-module de $Hom(T, \Omega)$, en associant à $\omega \in \Omega^2$ le morphisme $\iota\omega : \ T \longrightarrow \Omega$ défini par $\iota\omega(\tau) = i_\tau\omega$. Alors l'image de Ω^2 est caractérisée par deux propriétés: (a) le morphisme $\iota\omega$ est A-linéaire; (b) l'expression $\langle\tau', \iota\omega(\tau)\rangle$ est antisymétrique en τ, τ'.

Donc on peut réprésenter Ω^2 comme l'intersection de deux nouyaux

$$\Omega^2 = \mathrm{Ker}(d_H : \ Hom(T, \Omega) \longrightarrow Hom(A \otimes T, \Omega)) \cap$$

$$\cap \ \mathrm{Ker}(Q : \ Hom(T, \Omega) \longrightarrow Hom(S^2T, A))$$

où le Hochschild d_H est définie par la formule usuelle $d_H f(a, \tau) = af(\tau) - f(a\tau)$, et la "différentielle de Koszul" Q est définie par

$$Qf(\tau, \tau') = \mathrm{Sym}_{\tau,\tau'} \ \langle\tau, f(\tau')\rangle \tag{6.1.1}$$

Dans cette Section on va définir un tricomplexe tordu $\mathcal{HKR}(2)^{\cdots} = \{\mathcal{HKR}(2)^{ijk}\}$ avec $\mathcal{HKR}(2)^{000} = Hom(T, \Omega)$, $\mathcal{HKR}(2)^{010} = Hom(S^2T, A)$ et $\mathcal{HKR}(2)^{001} = Hom(A \otimes T, \Omega)$.

Dans ce tricomplexe i sera le degré de de Rham, j sera le degré de Koszul et k sera le degré de Hochschild. Il sera concentré en degrés $0 \leq i + j + k \leq 3$, $j = 0, 1$.

Le complexe simple associé $\mathcal{HKR}(2) = \mathrm{Tot}\mathcal{HKR}(2)^{\cdot\cdot\cdot}$ sera muni d'un plongement de complexes canonique

$$\iota : \ \Omega^{[2,5]} := \sigma_{\geq 2}\sigma_{\leq 5}\Omega^{\cdot}[2] \hookrightarrow \mathcal{HKR}(2) \tag{6.1.2}$$

Voici ces termes nonnuls.

Rez-de-chaussée. On aura $\mathcal{HKR}(2)^{000} = Hom(T, \Omega)$; les lignes

$$\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 00} : \ Hom(T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^2 T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^3 T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^4 T, \Omega)$$

$$\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 10} : \ Hom(S^2 T, A) \longrightarrow Hom(S^2 T \otimes T, A) \longrightarrow Hom(S^2 T \otimes \Lambda^2 T, A)$$

Premier étage:

$$\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 01} : \ Hom(A \otimes T, \Omega) \longrightarrow Hom(A \otimes T \otimes T, \Omega) \longrightarrow Hom(A \otimes T \otimes \Lambda^2 T, \Omega)$$

$$\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 11} : \ Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, A) \longrightarrow Hom(A \otimes T^{\otimes 3}, A)$$

Deuxième étage:

$$\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 02} : \ Hom(A^{\otimes 2} \otimes T, \Omega) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, \Omega)$$
$$\mathcal{HKR}(2)^{012} = Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, A)$$

Troisième étage:

$$\mathcal{HKR}(2)^{003} = Hom(A^{\otimes 3} \otimes T, \Omega)$$

Les différentielles agiront: le de Rham $d_{DR}^{ijk} : \ \mathcal{HKR}(2)^{ijk} \longrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{i+1,jk}$, le Koszul $Q^{i0k} : \ \mathcal{HKR}(2)^{i0k} \longrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{i1k}$ et le Hochschild $d_H^{ijk} : \ \mathcal{HKR}(2)^{ijk} \longrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{ij,k+1}$.

De plus, on aura 3 opérateurs

$$R^{ijk} : \ \mathcal{HKR}(2)^{ijk} \longrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{i+2,j-1,k}$$

pour $(ijk) = (010), (110)$ ou (011), et 2 opérateurs

$$M^{ijk} : \ \mathcal{HKR}(2)^{ijk} \longrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{i+1,j-1,k+1}$$

pour $(ijk) = (010)$ ou (011).

Rez-de-chaussée.

6.2. Définissons les plongements

$$\iota_n : \ \Omega^n \longrightarrow Hom(\Lambda^{n-1} T, \Omega) \tag{6.2.1}$$

par

$$\iota\omega(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = i_{\tau_{n-1}} i_{\tau_{n-2}} \dots i_{\tau_1} \omega \tag{6.2.2}$$

Alors, en employant la formule de Cartan et la formule $i_\tau \mathrm{Lie}_{\tau'} = \mathrm{Lie}_{\tau'} i_\tau - i_{[\tau',\tau]}$, on établit sans peine que

$$\iota_{n+1} d\omega = d_{Ch} \iota_n \omega + E'\omega,$$

où $d_{Ch} : Hom(\Lambda^{n-1}T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^n T, \Omega)$ est la différentielle de Chevalley dans le complexe $C^\cdot(T, \Omega)$, i.e.

$$d_{Ch} f(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{p<q} (-1)^{p+q} f([\tau_p, \tau_q], \dots, \hat{\tau}_p, \dots, \hat{\tau}_q, \dots) +$$

$$+ \sum_p (-1)^{p+1} \tau_p f(\tau_1, \dots, \hat{\tau}_p, \dots) \tag{6.2.3}$$

et

$$E'\omega(\tau_1, \dots, \tau_n) = (-1)^n d\langle \tau_n, \iota_n \omega(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})\rangle$$

Supposons que n est inversible dans A. Alors on peut récrire cela sous une forme plus symétrique

$$E'\omega(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} (-1)^p d\langle \tau_p, \iota_n \omega(\tau_1, \dots, \hat{\tau}_p, \dots)\rangle$$

Ceci entraîne

6.3. *Lemme.* Supposons que n est inversible dans A. Définissons la flèche $E : Hom(\Lambda^{n-1}T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^n T, \Omega)$ par

$$Ef(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} (-1)^p d\langle \tau_p, f(\tau_1, \dots, \hat{\tau}_p, \dots)\rangle \tag{6.3.1}$$

et posons $d_{DR} = d_{Ch} + E$. Alors $d_{DR} \iota_n = \iota_{n+1} d$.

6.4. *Ligne principale.* Ceci justifie la définition: les différentielles de de Rham d_{DR} dans la ligne

$$\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 00} : \; Hom(T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^2 T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^3 T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^4 T, \Omega)$$

sont définies par $d_{DR} = d_{Ch} + E$, où d_{Ch} est donnée par (6.2.3) et E est donnée par (6.3.1). Ici on suppose que 6 est inversible dans A. On utilisera la notation d_{DR}^{i00} pour la flèche $\mathcal{HKR}(2)^{i00} \longrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{i+1,00}$.

Les inclusions ι_n (6.2.1) donnent lieu à l'inclusion

$$\iota : \; \Omega^{[2,5]} \hookrightarrow \mathcal{HKR}(2)^{\cdot 00} \tag{6.4.1}$$

Par contre, $\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 00}$ n'est pas un complexe: tandis que $d_{Ch}^2 = 0$, à cause du terme E, $d_{DR}^2 \neq 0$.

6.5. Par exemple, on calcule facilement que

$$d_{DR}^{100}d_{DR}^{000}f(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = -\frac{1}{6}\ \mathrm{Cycle}_{123}\ \{d\langle[\tau_1,\tau_2],f(\tau_3)\rangle + d\langle\tau_3,f([\tau_1,\tau_2])\rangle\},$$

d'où le

6.6. *Lemme.* Définissons le morphisme

$$R^{010}:\ \mathcal{HKR}(2)^{010} = Hom(S^2T,A) \longrightarrow Hom(\Lambda^3T,\Omega) = \mathcal{HKR}(2)^{200}$$

par

$$R^{010}f(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = -\frac{1}{6}\ \mathrm{Cycle}_{123}\ df([\tau_1,\tau_2],\tau_3)$$

Alors $d_{DR}^{100}d_{DR}^{000} = R^{010}Q^{000}$, où Q^{000} est défini par (6.1.1).

6.7. Plus généralement, définissons les morphismes de Koszul

$$Q^{i00}:\ \mathcal{HKR}(2)^{i00} = Hom(\Lambda^{i+1}T,\Omega) \longrightarrow Hom(S^2T\otimes\Lambda^iT,A) = \mathcal{HKR}(2)^{i10}$$

$(i=0,1,2)$ par

$$Q^{i00}f(\tau_1,\tau_2;\tau_3,\ldots) = \mathrm{Sym}_{12}\langle\tau_1,f(\tau_2,\tau_3,\ldots)\rangle$$

6.8. *Lemme.* On a $d_{DR}^{200}d_{DR}^{100} = R^{110}Q^{100}$, où

$$R^{110}:\ \mathcal{HKR}(2)^{110} = Hom(S^2T\otimes T,A) \longrightarrow Hom(\Lambda^4T,\Omega) = \mathcal{HKR}(2)^{300}$$

et défini par

$$R^{110}f(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) = -\frac{1}{24}\ \mathrm{Alt}_{1234}\ df([\tau_1,\tau_2],\tau_3;\tau_4)$$

6.9. Les deux différentielles de de Rham dans la ligne

$$\mathcal{HKR}(2)^{\cdot 10}:\ Hom(S^2T,A) \longrightarrow Hom(S^2T\otimes T,A) \longrightarrow Hom(S^2T\otimes\Lambda^2T,A)$$

sont trouvées de la condition de commutativité de deux carrés: $d_{DR}^{010}Q^{000} = Q^{100}d_{DR}^{000}$ et $d_{DR}^{110}Q^{100} = Q^{200}d_{DR}^{100}$. On arrive aux reponses suivantes.

Les opérateurs

$$d_{DR}^{i10}:\ Hom(S^2T\otimes\Lambda^iT,A) \longrightarrow Hom(S^2T\otimes\Lambda^{i+1}T,A)\ \ (i=0,1)$$

sont définis par $d_{DR}^{i10} = -d_{Ch}^{i10} - E^{i10}$.

Ici d_{Ch}^{i10} est la différentielle de Chevalley venant de l'identification

$$Hom(S^2T\otimes\Lambda^iT,A) = Hom(\Lambda^iT,Hom(S^2T,A)) = C^i(T^{\mathrm{Lie}},Hom(S^2T,A)),$$

l'action de T^{Lie} sur $Hom(S^2T,A)$ étant définie suivant l'usage, $(\tau f)(\tau',\tau'') = \tau f(\tau',\tau'') - f([\tau,\tau'],\tau'') - f(\tau',[\tau,\tau''])$.

Les opérateurs E sont définis par

$$E^{010}f(\tau,\tau';\tau_1) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sym}_{\tau,\tau'}\ \tau f(\tau',\tau_1)$$

et

$$E^{110}f(\tau,\tau';\tau_1,\tau_2) = -\frac{1}{3}\mathrm{Sym}_{\tau,\tau'}\ \{\tau f(\tau',\tau_1;\tau_2) - \tau f(\tau',\tau_2;\tau_1)\}$$

6.10. *Lemme.* On a les identités $d_{DR}^{110}d_{DR}^{010} = Q^{200}R^{010}$ et $R^{110}d_{DR}^{010} = d_{DR}^{200}R^{010}$.

6.11. Cela termine la définition de la partie $\mathcal{HKR}(2)^{\cdot\cdot 0}$; les relations écrites signifient que celui-la est un bicomplexe tordu.

Premier étage

6.12. Les Hochschilds (par rapport au premier argument)

$$d_H^{i00}:\ \mathcal{HKR}(2)^{i00} = Hom(\Lambda^{i+1}T,\Omega) \longrightarrow Hom(A\otimes T\otimes\Lambda^i T,\Omega) = \mathcal{HKR}(2)^{i01}$$

$(i = 0,1,2)$ seront définis par les formules usuelles

$$d_H^{i00}f(a,\tau;\tau_1,\dots) = af(\tau,\tau_1,\dots) - f(a\tau,\tau_1,\dots)$$

Pour $f \in Hom(T,A) = \mathcal{HKR}(2)^{000}$ on calcule:

$$d_H^{100}d_{DR}^{000}f(a,\tau,\tau') = -\tau' d_H f(a,\tau) + d_H f(\tau'(a),\tau) + d_H f(a,[\tau',\tau]) +$$

$$+\frac{1}{2}d\langle\tau', d_H f(a,\tau)\rangle - \frac{1}{2}da\ Qf(\tau,\tau')$$

Ceci justifie les définitions suivantes: le de Rham $d_{DR}^{001} := -d_{Ch}^{001} - E^{001}$, où

$$d_{Ch}^{001}f(a,\tau,\tau') = \tau' f(a,\tau) - f(\tau'(a),\tau) - f(a,[\tau',\tau])$$

et

$$E^{001}f(a,\tau,\tau') = -\frac{1}{2}d\langle\tau', f(a,\tau)\rangle$$

De l'autre côté, un opérateur exotique

$$M^{010}:\ \mathcal{HKR}(2)^{010} = Hom(S^2T,A) \longrightarrow Hom(A\otimes T\otimes T,\Omega) = \mathcal{HKR}(2)^{101}$$

sera défini par

$$M^{010}f(a,\tau,\tau') = -\frac{1}{2}da\ f(\tau,\tau')$$

Alors notre calcul signifie que

$$d_H^{100}d_{DR}^{000} = d_{DR}^{001}d_H^{000} + M^{010}Q^{000}$$

6.13. De même, le Chevalley

$$d_{Ch}^{101}:\ Hom(A\otimes T\otimes T,\Omega) \longrightarrow Hom(A\otimes T\otimes\Lambda^2 T,\Omega)$$

vient de l'identification $Hom(A \otimes T \otimes \Lambda^i T, \Omega) = Hom(\Lambda^i T, Hom(A \otimes T, \Omega)) = C^i(T^{\mathrm{Lie}}, Hom(A \otimes T, \Omega))$, explicitement,

$$d_{Ch}^{101} f(a; \tau; \tau_1, \tau_2) = -f(a; \tau; [\tau_1, \tau_2]) +$$

$$+ \mathrm{Alt}_{12} \, \{\tau_1 f(a; \tau; \tau_2) - f(\tau_1(a); \tau; \tau_2) - f(a; [\tau_1, \tau]; \tau_2)\}$$

On pose

$$E^{101} f(a; \tau; \tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{3} \, \mathrm{Alt}_{12} \, d\langle \tau_1, f(a; \tau; \tau_2)\rangle,$$

et l'on définit $d_{DR}^{101} := -d_{Ch}^{101} - E^{101}$.

D'un autre côté, on introduit

$$M^{110} : \; Hom(S^2 T \otimes T, A) \longrightarrow Hom(A \otimes T \otimes \Lambda^2 T, \Omega)$$

par

$$M^{110} f(a; \tau; \tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{3} \, da \; \mathrm{Alt}_{12} \; f(\tau, \tau_1; \tau_2)$$

Alors nous aurions

$$d_H^{200} d_{DR}^{100} = d_{DR}^{101} d_H^{100} + M^{110} Q^{100}$$

6.14. Les Hochschilds

$$d_H^{i10} : \; Hom(S^2 T \otimes \Lambda^i T, A) \longrightarrow Hom(A \otimes T \otimes T \otimes \Lambda^i T, A)$$

$(i = 0, 1)$ sont définis par

$$d_H f(a; \tau; \tau'; \ldots) = a f(\tau, \tau'; \ldots) - f(a\tau, \tau'; \ldots)$$

Les Koszuls

$$Q^{i01} : \; Hom(A \otimes T \otimes \Lambda^i T, \Omega) \longrightarrow Hom(A \otimes T \otimes T \otimes \Lambda^i T, A)$$

$(i = 0, 1)$ seront définis de la commutativité $Q d_H = d_H Q$, ce qui donne

$$Q^{i01} f(a; \tau; \tau'; \ldots) = \langle \tau', f(a; \tau; \ldots)\rangle$$

6.15. Le de Rham

$$d_{DR}^{011} : \; Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, A) \longrightarrow Hom(A \otimes T^{\otimes 2} \otimes T, A)$$

est défini par $d_{DR}^{011} = -d_{Ch}^{011} - E^{011}$, où

$$d_{Ch}^{011} f(a; \tau, \tau'; \tau'') = \tau'' f(a; \tau, \tau') - f(\tau''(a); \tau, \tau') - f(a; [\tau'', \tau], \tau') - f(a; \tau, [\tau'', \tau'])$$

et

$$E^{011} f(a; \tau, \tau'; \tau'') = -\frac{1}{2} \tau' f(a; \tau', \tau'')$$

Ces formules sont déduites soit de la condition (a), soit de la condition (b) du lemme suivant.

6.16. *Lemme.* (a) $Q^{101} d^{001}_{DR} = d^{011}_{DR} Q^{001}$

(b) $d^{110}_H d^{010}_{DR} = d^{011}_{DR} d^{010}_H + Q^{101} M^{010}$

Enfin, l'opérateur R du premier étage sera défini dans le lemme ci-dessous.

6.17. *Lemme.* Si l'on définit la flèche

$$R^{011}: \ Hom(A \otimes T \otimes T, A) \longrightarrow Hom(A \otimes T \otimes \Lambda^2 T, \Omega)$$

par

$$R^{011} f(a; \tau; \tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{6} \ d[f(a; \tau; [\tau_1, \tau_2]) - \mathrm{Alt}_{12} \ \{f(\tau_1(a); \tau; \tau_2) + f(a; [\tau_1, \tau]; \tau_2)\}]$$

alors

(a) $d^{101}_{DR} d^{001}_{DR} = R^{011} Q^{001}$

et

(b) $d^{200}_H R^{010} = R^{011} d^{010}_H + M^{110} d^{010}_{DR} + d^{101}_{DR} M^{010}$

Ceci termine la définition de la partie $\{\mathcal{HKR}(2)^{\cdot\cdot i}\}_{0 \leq i \leq 1}$ du notre tricomplexe tordu.

Deuxième étage

6.18. Les formules sont tout à fait pareilles aux celles du premier étage.

On définit les Hochschilds:

$$d^{001}_H: \ Hom(A \otimes T, \Omega) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 2} \otimes T, \Omega)$$

par

$$d^{001}_H f(a, b; \tau) = af(b; \tau) - f(ab; \tau) + f(a; b\tau)$$

et

$$d^{101}_H: \ Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, \Omega) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, \Omega)$$

par

$$d^{101}_H f(a, b; \tau, \tau') = af(b; \tau, \tau') - f(ab; \tau, \tau') + f(a; b\tau, \tau')$$

Ensuite,

$$M^{011}: \ Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, A) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, \Omega)$$

est défini par

$$M^{011} f(a, b; \tau, \tau') = -\frac{1}{2} da \ f(b; \tau, \tau')$$

Le de Rham

$$d^{002}_{DR}: \ Hom(A^{\otimes 2} \otimes T, \Omega) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, \Omega)$$

sera défini par $d_{DR}^{002} = -d_{Ch}^{002} - E^{002}$, où

$$d_{Ch}^{002} f(a,b;\tau,\tau') = \tau' f(a,b;\tau) - f(\tau'(a),b;\tau) - f(a,\tau'(b);\tau) - f(a,b;[\tau',\tau])$$

et

$$E^{002} f(a,b;\tau,\tau') = -\frac{1}{2} d\langle \tau', f(a,b;\tau)\rangle$$

Alors on aura

6.19. *Lemme.* (a) $d_H^{101} d_{DR}^{001} = d_{DR}^{002} d_H^{001} + M^{011} Q^{001}$

(b) $d_H^{101} M^{010} = -M^{011} d_H^{010}$

6.20. On définit le Hochschild

$$d_H^{011}:\ Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, A) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, A)$$

par

$$d_H^{011} f(a,b;\tau,\tau') = af(b;\tau,\tau') - f(ab;\tau,\tau') + f(a;b\tau,\tau')$$

et le Koszul

$$Q^{002}:\ Hom(A^{\otimes 2} \otimes T, \Omega) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, \Omega)$$

par

$$Q^{002} f(a,b;\tau,\tau') = \langle \tau', f(a,b;\tau)\rangle$$

Alors on aura $Q^{002} d_H^{001} = d_H^{011} Q^{001}$.

Troisième étage

6.21. Enfin, le Hochschild

$$d_H^{002}:\ Hom(A^{\otimes 2} \otimes T, \Omega) \longrightarrow Hom(A^{\otimes 3} \otimes T, \Omega)$$

est défini par la formule usuelle

$$d_H^{002} f(a,b,c;\tau) = af(b,c;\tau) - f(ab,c;\tau) + f(a,bc;\tau) - f(a,b;c\tau)$$

Pour tous les Hochschilds, on a évidemment $d_H^2 = 0$.

Ceci termine la définition du tricomplexe tordu $\mathcal{HKR}(2)^{\cdots}$, avec $d' = d_{DR}$, $d'' = Q$ et $d''' = d_H$.

Attention: notre de Rham est $-d_{DR}$ de [S], nos $d_H^{\cdot\cdot 0}$ sont $-d_H$ de [S], et notre M^{011} et $-M$ de [S]; les autres morphismes sont les mêmes.

Le plongement ι (6.1.2) est induit par (6.4.1). Son image

$$\mathrm{Im}\ \iota = \mathrm{Ker}\ d_H^{\cdot 00} \cap \mathrm{Ker}\ Q^{\cdot 00}$$

§7. Structures vertex

Dans 7.1 - 7.3 on réproduit les considérations de [S], Finale. Pour les détails de calculs, voir *op. cit.*

7.1. *Cocycle* ϵ_2. Définissons des éléments suivants: $\epsilon_2^{002} \in \mathcal{HKR}(2)^{002} = Hom(A^{\otimes 2} \otimes T, \Omega)$ par

$$\epsilon_2^{002}(a, b; \tau) = -\tau(a)db - \tau(b)da;$$

$\epsilon_2^{011} \in \mathcal{HKR}(2)^{011} = Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, A)$ par

$$\epsilon_2^{011}(a; \tau, \tau') = \tau\tau'(a)$$

et $\epsilon_2^{101} \in \mathcal{HKR}(2)^{101} = Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, \Omega)$ par

$$\epsilon_2^{101}(a; \tau, \tau') = \frac{1}{2}d\tau\tau'(a)$$

Posons $\epsilon_2 = (\epsilon_2^{002}, \epsilon_2^{011}, \epsilon_2^{101}) \in \mathcal{HKR}(2)^2$.

7.2. *Théorème.* $d_{\mathcal{HKR}}\ \epsilon_2 = 0$.

Cette assertion est équivalente aux cinq identités:

$$d_H\epsilon_2^{002} = 0 \tag{B1}$$

$$Q\epsilon_2^{002} - d_H\epsilon_2^{011} = 0 \tag{B2}$$

$$d_{DR}\epsilon_2^{002} - d_H\epsilon_2^{101} + M\epsilon_2^{011} = 0 \tag{B3}$$

$$d_{DR}\epsilon_2^{011} - Q\epsilon_2^{101} = 0 \tag{B4}$$

et

$$d_{DR}\epsilon_2^{101} - R\epsilon_2^{011} = 0, \tag{B5}$$

qui se vérifient très facilement.

7.3. *Une structure vertex sur* T est un cochaîne $v \in \mathcal{HKR}(2)^1$ telle que $d_{\mathcal{HKR}}\ v = \epsilon_2$.

En composantes, $v = (v^{001}, v^{010}, v^{100})$. Introduisons les notations $\gamma = v^{001} \in Hom(A \otimes T, \Omega)$, $\langle , \rangle = -v^{010} \in Hom(S^2T, A)$ et $c = v^{100} \in Hom(\Lambda^2T, \Omega)$. Alors l'axiome de structure vertex est équivalent à cinq identités (A1) - (A5) ci-dessous.

$$d_H\gamma = \epsilon_2^{002} \tag{A1}$$

$$d_H\langle , \rangle + Q\gamma = \epsilon_2^{011} \tag{A2}$$

$$-d_Hc - M\langle , \rangle + d_{DR}\gamma = \epsilon_2^{101} \tag{A3}$$

$$d_{DR}\langle , \rangle + Qc = 0 \tag{A4}$$

et

$$d_{DR}c + R\langle , \rangle = 0 \qquad (A5)$$

On voit aussitôt que ces axiomes coïncident avec les axiomes (A1) - (A5) de [GMS], 1.4.

De même, *un morphisme* $h: \ v \longrightarrow v'$ de deux structures vertex est une cochaîne $h \in \mathcal{HKR}(2)^0 = Hom(T, \Omega)$ telle que $d_{\mathcal{HKR}} \ h = v' - v$. On voit que ceci coïncide avec la notion introduite dans *op. cit.*, 3.5 (avec g_A, g_T, g_Ω étant les morphismes identiques).

7.4. Fixons une base abélienne $\mathfrak{b} = \{\tau_i\}$ de T. Définissons $\langle , \rangle_{\mathfrak{b}} \in Hom(S^2T, A)$ par

$$\langle a\tau_i, b\tau_j\rangle_{\mathfrak{b}} = -\tau_j(a)\tau_i(b)$$

Il existe l'unique $\gamma_{\mathfrak{b}} \in Hom(A \otimes T, \Omega)$ quie vérifie l'axiome (A2) avec ce $\langle , \rangle_{\mathfrak{b}}$. En effet, (A2) s'ecrit explicitement comme

$$\langle \gamma_{\mathfrak{b}}(a, \tau), \tau'\rangle = \langle a\tau, \tau'\rangle_{\mathfrak{b}} - a\langle \tau, \tau'\rangle_{\mathfrak{b}} + \tau\tau'(a), \qquad (A2)$$

qui nous donne

$$\gamma_{\mathfrak{b}}(b, a\tau_i) = a \ d\tau_i(b)$$

De même, il existe l'unique $c_{\mathfrak{b}} \in Hom(\Lambda^2T, \Omega)$ tel que $c_{\mathfrak{b}}(\tau_i, \tau_j) = 0$ pour tous i, j et satisfait à l'axiome (A3). Il est donné par la formule

$$c_{\mathfrak{b}}(a\tau_i, b\tau_j) = \frac{1}{2} \ \mathrm{Alt}_{a\tau_i, b\tau_j} \ \tau_i(b)d\tau_j(a)$$

7.5. *Théorème.* Le triple $v_{\mathfrak{b}} = (\gamma_{\mathfrak{b}}, -\langle , \rangle_{\mathfrak{b}}, c_{\mathfrak{b}})$ est une structure vertex.

On rémarque que la structure vertex $v_{\mathfrak{b}}$ diffère de celle utilisée dans [GMS], 5.7; notre $v_{\mathfrak{b}}$ est plus simple. Nous laissons la preuve de 7.5 au lecteur.

7.6. Soient $\mathfrak{b} = \{\tau_i\}, \ \mathfrak{b}' = \{\tau'_i\}, \mathfrak{b}'' = \{\tau''_j\}$ trois bases abéliennes, $\mathfrak{b}' = \phi\mathfrak{b}, \ \mathfrak{b}'' = \psi\mathfrak{b}', \ \phi, \psi \in GL_n(A)$.

On définit un élément $h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} \in Hom(T, \Omega) = \mathcal{HKR}(2)^0$ par

$$h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a\tau'_i) = \frac{1}{2} tr\{\phi^{-1}a\tau'_i(\phi)\phi^{-1}d\phi\} + [d\phi \ \phi^{-1}]^{ip}\tau'_p(a)$$

Rappelons les composantes de la deuxième forme de Chern - Simons (cf. 3.8):

$$\beta^{11}(\phi) = \frac{1}{6} tr\{\ell(\phi)^3\}; \ \beta^{02}(\psi, \phi) = \frac{1}{2} tr\{\ell(\psi)^{\phi}\ell(\phi)\},$$

où $\ell(\phi) = \phi^{-1}d\phi, \ \ell(\psi)^{\phi} = \psi^{-1}\ell(\phi)\psi$.

Le théorème ci-dessous réproduit le résultat principal de [GMS]: Théorème 5.14.

7.7. *Théorème.* (a) $d_{DR}h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a\tau'_i, b\tau'_j) = c_{\mathfrak{b}'}(a\tau'_i, b\tau'_j) - c_{\mathfrak{b}}(a\tau'_i, b\tau'_j) - \langle b\tau'_j, \langle a\tau'_i, \beta^{11}(\phi)\rangle\rangle$

(b) $\langle a\tau'_i, h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(b\tau'_j)\rangle + \langle b\tau'_j, h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a\tau'_i)\rangle = \langle a\tau'_i, b\tau'_j\rangle_{\mathfrak{b}} - \langle a\tau'_i, b\tau'_j\rangle_{\mathfrak{b}'}$

(c) $ah_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(b\tau'_j) - h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(ab\tau'_j) = \gamma_{\mathfrak{b}'}(a, b\tau_j) - \gamma_{\mathfrak{b}}(a, b\tau_j)$

(d) $h_{\mathfrak{b}',\mathfrak{b}''}(a\tau_i'') - h_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}''}(a\tau_i'') + h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a\tau_i'') = -\langle a\tau_i'', \beta^{02}(\psi,\phi)\rangle$

On peut démontrer ce théorème par la méthode de [GMS], ou bien faire la vérification directe. Nous laissons les détails comme un exercice au lecteur.

7.8. Considérons le bicomplexe de Čech $\check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}, \mathcal{HKR}(2)^{\cdot})$ où le degré de Čech est le premier et le complexe simple associé $\check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}, \mathcal{HKR}(2))$.

Le composé

$$\Omega^{[2,3\rangle} \hookrightarrow \Omega^{[2,5]} \xrightarrow{\iota} \mathcal{HKR}(2)$$

induit le morphisme canonique

$$\mu: \ CS(2) = C^{\cdot}(GL_n(A), \Omega^{[2,3\rangle}) \longrightarrow \check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}, \mathcal{HKR}(2))$$

Posons $v = \{v_{\mathfrak{b}}\} \in \check{C}^0(\mathfrak{B}; \mathcal{HKR}(2)^1)$; $h = \{h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}\} \in \check{C}^1(\mathfrak{B}; \mathcal{HKR}(2)^0)$.

Alors le théorème précédent se recrit

7.9. *Théorème.* (a) $d_{\mathcal{HKR}}h - d_c v = -\mu(\beta^{11})$

(b) $d_c h = -\mu(\beta^{02})$

De plus, on a comme d'habitude le morphisme d'augmentation $\delta: \ \mathcal{HKR}(2) \longrightarrow \check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HKR}(2))$, et 7.5 signifie que $d_{\mathcal{HKR}}v = \delta(\epsilon_2)$.

Définissons le complexe

$$\hat{CS}(2) = \text{Cone}\ \{(\mu,\delta): \ CS(2) \oplus \mathcal{HKR}(2) \longrightarrow \check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{HKR}(2))[-1]\},$$

cf. (5.6.2). On a le morphisme canonique de complexes $\pi: \ \hat{CS}(2) \longrightarrow CS(2)$.

On définit

$$\hat{v} = (v,h) \in \check{C}^1(\mathfrak{B}; \mathcal{HKR}(2))$$

Toute l'information précédente est rassemblée dans

7.10. *Théorème.* La cochaîne $\hat{\beta}_2 = (\beta_2, -\epsilon_2, \hat{v}) \in \hat{CS}(2)^2$ est un cocycle tel que $\pi(\hat{\beta}_2) = \beta_2$.

§8. Structures prémembranaires

8.1. *Complexes de Koszul.* Le n-ième complexe de Koszul $\mathcal{K}(n) = \{\mathcal{K}(n)^i\}$ est concentré en degrés $0 \le i \le n-1$

$$\mathcal{K}(n)^{\cdot}: \ Hom(T, \Omega^{n-1}) \longrightarrow Hom(S^2T, \Omega^{n-2}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow Hom(S^nT, A),$$

i.e. $\mathcal{K}(n)^i = Hom(S^{i-1}T, \Omega^{n-i+1})$. Les différentielles $Q: \ \mathcal{K}(n)^i \longrightarrow \mathcal{K}(n)^{i+1}$ sont définis par

$$Qf(\tau_1, \ldots, \tau_i) = \sum_{p=1}^{i} \langle \tau_p, f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_p, \ldots)\rangle$$

Il est clair que $Q^2 = 0$.

8.2. *Complexes de Hochschild - Koszul.* Le n-ième bicomplexe de Hochschild - Koszul $\mathcal{HK}(n)^{\cdot\cdot} = \{\mathcal{HK}(n)^{ij}\}$ habite en degrés $0 \leq i \leq n-1,\ j \geq 0$. Par définition, la 0-ième ligne $\mathcal{HK}(n)^{i0}$ coïncide avec $\mathcal{K}(n)$.

Les colonnes sont le complexes de Hochschild par rapport au premier argument:

$$\mathcal{HK}(n)^{i\cdot} :\ Hom(S^{i-1}T, \Omega^{n-i+1}) \longrightarrow Hom(A \otimes T \otimes S^{i-2}T, \Omega^{n-i+1}) \longrightarrow \dots$$

$$\longrightarrow Hom(A^{\otimes j} \otimes T \otimes S^{i-2}T, \Omega^{n-i+1}) \dots ,$$

les différentielles verticales étant les Hochschilds usuels:

$$d_H f(a_1, \dots , a_j; \tau; \dots) = a_1 f(a_2, \dots , a_j; \tau; \dots) + \sum_{p=1}^{j-1} (-1)^p f(\dots , a_p a_{p+1}, \dots ; \tau; \dots) +$$

$$+(-1)^j f(a_1, \dots , a_{j-1}; a_j\tau; \dots)$$

Par contre, les différentielles horisontales dans la j-ième ligne $\mathcal{HK}(n)^{\cdot j},\ j > 0$, sont les Koszuls suivants:

$$Qf(a_1, \dots , a_j; \tau; \tau_1, \dots , \tau_i) = \sum_{p=1}^{i} \langle \tau_p, f(a_1, \dots , a_j; \tau; \tau_1, \dots , \hat{\tau}_p, \dots)\rangle$$

On vérifie sans peine que $d_H Q = Q d_H$. Donc le premier degré est de Koszul, et le deuxième est de Hochschild.

Le complexe simple associé sera désigné par $\mathcal{HK}(n) = \{\mathcal{HK}(n)^i\}$.

En effet, désormais on ne sera interessé qu'en *troisième* complexe $\mathcal{HK}(3)$. On suppose dans cette section et dans la section suivante que 6 est inversible dans l'anneau de base k.

8.3. *Cocycle $\epsilon_3^{\mathcal{HK}}$.* Définissons les éléments: $\epsilon \in Hom(A \otimes T \otimes S^2T, A) = \mathcal{HK}(3)^{21}$ par

$$\epsilon(a; \tau; \tau', \tau'') = \frac{1}{2}\ \mathrm{Sym}_{\tau', \tau''}\ \tau\tau'\tau''(a),$$

$\epsilon' \in Hom(A^{\otimes 2} \otimes T^{\otimes 2}, \Omega) = \mathcal{HK}(3)^{12}$ par

$$\epsilon'(a, b; \tau; \tau') = -\ \mathrm{Sym}_{a,b}\ \{\frac{1}{2}\tau(a)\ d\tau'(b) + \tau\tau'(a)\ db\}$$

et $\epsilon'' = Hom(A^{\otimes 3} \otimes T, \Omega^2) = \mathcal{HK}(3)^{03}$ par

$$\epsilon''(a, b, c; \tau) = \tau(b)\ dadc + \frac{1}{2}\tau(c)\ dadb + \frac{1}{2}\tau(a)\ dbdc$$

On les rassemble en

$$\epsilon_3^{\mathcal{HK}} = (-\epsilon'', -\epsilon', \epsilon) \in \mathcal{HK}(3)^3$$

8.4. *Théorème.* $d_{\mathcal{HK}}(\epsilon_3^{\mathcal{HK}}) = 0$.

En effet, on commence de l'élément ϵ "bien naturel". Après on trouve ϵ' de la condition

$$d_H\epsilon = Q\epsilon' \tag{8.4.1}$$

Ensuite, on trouve ϵ'' de la condition

$$d_H\epsilon' = Q\epsilon'' \tag{8.4.2}$$

Enfin, on vérifie que

$$d_H\epsilon'' = 0 \tag{8.4.3}$$

Les trois équations (8.4.1) - (8.4.3) sont équivalentes à l'assertion du théorème. Pour les détails, voir 8.7 - 8.9.

Une structure prémembranaire sur T est une cochaîne $m = (m^{02}, m^{11}, m^{20}) \in \mathcal{HK}(3)^2$ telle que $d_{\mathcal{HK}}m = \epsilon_3^{\mathcal{HK}}$.

8.5. Fixons une base abélienne $\mathfrak{b} = \{\tau_i\}$ de T. Considérons un élément $\rho_{\mathfrak{b}} \in Hom(T^{\otimes 3}, A)$:

$$\rho_{\mathfrak{b}}(a\tau_i, b\tau_j, c\tau_k) = \tau_k(a)\tau_i(b)\tau_j(c) \tag{8.5.1}$$

Manifestement, il possède la symétrie cyclique: $\rho_{\mathfrak{b}}(\tau, \tau', \tau'') = \rho_{\mathfrak{b}}(\tau', \tau'', \tau)$. Donc, si l'on définit $\{,,\}_{\mathfrak{b}}$ par

$$\{\tau, \tau', \tau''\}_{\mathfrak{b}} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{Sym}_{\tau',\tau''}\ \rho_{\mathfrak{b}}(\tau, \tau', \tau''), \tag{8.5.2}$$

cet élément appartiendra à $Hom(S^3T, A) = \mathcal{HK}(3)^{20}$.

De plus, on introduit deux éléments suivants: $\gamma_{\mathfrak{b}} \in Hom(A \otimes T^{\otimes 2}, \Omega) = \mathcal{HK}(3)^{11}$,

$$\gamma_{\mathfrak{b}}(a; b\tau_j, c\tau_k) = -\frac{1}{2}\ [b\ d\tau_j\{c\tau_k(a)\} + b\tau_j(c)\ d\tau_k(a)] \tag{8.5.3}$$

et $\gamma'_{\mathfrak{b}} \in Hom(A^{\otimes 2} \otimes T, \Omega^2) = \mathcal{HK}(3)^{02}$,

$$\gamma'_{\mathfrak{b}}(a, b; c\tau_k) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Sym}_{a,b}\ da\ c\ d\tau_k(b) \tag{8.5.4}$$

On les rassemble en

$$m_{\mathfrak{b}} = (-\gamma'_{\mathfrak{b}}, -\gamma_{\mathfrak{b}}, \{,,\}_{\mathfrak{b}}) \in \mathcal{HK}(3)^2$$

8.6. *Théorème.* $m_{\mathfrak{b}}$ est une structure prémembranaire.

En effet, on commence de l'élément $\{,,\}_{\mathfrak{b}}$ "bien naturel". Après on trouve $\gamma_{\mathfrak{b}}$ de l'équation

$$d_H\{,,\}_{\mathfrak{b}} = \epsilon + Q\gamma_{\mathfrak{b}} \tag{8.6.1}$$

Ensuite, on trouve $\gamma'_{\mathfrak{b}}$ de la condition

$$d_H\gamma_{\mathfrak{b}} = -\epsilon' + Q\gamma'_{\mathfrak{b}} \tag{8.6.2}$$

Enfin, on vérifie que

$$d_H\gamma'_{\mathfrak{b}} = \epsilon'' \tag{8.6.3}$$

Les trois équations ci-dessus sont équivalentes à 8.6.

§9. Troisième cocycle de Chern - Hodge raffiné

9.1. Maintenant considérons le tricomplexe $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B};\mathcal{HK}(3)^{\cdot\cdot})$, le degré de Koszul étant le premier, le degré de Hochschild étant le deuxième et le degré de Čech étant le troisième. On désigne par $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B};\mathcal{HK}(3))$ le complexe simple associé.

On a, comme d'habitude, le morphisme d'augmentation

$$\delta:\ \mathcal{HK}(3)\longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B};\mathcal{HK}(3))$$

De plus, on considère Ω^3 comme un sous-module de $Hom(T,\Omega^2)=\mathcal{HK}(3)^{00}$ par la règle usuelle: on associe à une forme $\omega\in\Omega^3$ la flèche $\iota\omega:\ T\longrightarrow\Omega^2,\ \iota\omega(\tau)=i_\tau\omega$, dù l'inclusion

$$\iota:\ \Omega^3\hookrightarrow\mathcal{HK}(3),$$

d'où le morphisme

$$\mu:\ C^{\cdot}(GL_n(A),\Omega^3)\longrightarrow\check{\mathrm{C}}^{\cdot}(\mathfrak{B};\mathcal{HK}(3))$$

Rappelons la forme $\beta_3^{CH}:=\beta^{03}\in Z^3(GL_n(A),\Omega^3)$,

$$\beta_3^{CH}(\chi,\psi,\phi)=\frac{1}{6}\ tr\{\ell(\chi)^{\psi\phi}\ell(\psi)^{\phi}\ell(\phi)\},$$

cf. 3.11. On l'appele *le troisième cocycle de Chern - Hodge*, puisqu'il définit le troisième caractère de Chern style Hodge.

9.2. On considère la collection $m=\{m_{\mathfrak{b}}\}$ construite dans 8.5 ci-dessus comme une cochaîne $\hat{m}^{\cdot\cdot 0}\in\check{\mathrm{C}}^0(\mathfrak{B};\mathcal{HK}(3)^{\cdot\cdot})$, avec les composantes $(\hat{m}^{020},\hat{m}^{110},\hat{m}^{200})=(-\gamma',-\gamma,\{,\,\})$.

9.3. Soient $\mathfrak{b}=\{\tau_i\},\mathfrak{b}'=\{\tau_i'\}\in\mathfrak{B},\ \mathfrak{b}'=\phi\mathfrak{b}$. On définit l'élément $-h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}=\hat{m}^{101}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}\in Hom(S^2T,\Omega)=\mathcal{HK}(3)^{10}$ par

$$-h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a\tau_i',b\tau_j')=\hat{m}^{101}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a\tau_i',b\tau_j')=$$

$$=-\ \mathrm{Sym}_{a\tau_i',b\tau_j'}\ [\frac{1}{6}\ tr\{\phi^{-1}a\tau_i'(\phi)\phi^{-1}b\tau_j'(\phi)\phi^{-1}d\phi\}+$$

$$+\frac{1}{2}\ [d\phi\ \phi^{-1}a\tau_i'(\phi)\phi^{-1}]^{jp}\ \tau_p'(b)+\frac{1}{2}\ [d\phi\ \phi^{-1}]^{jp}\ \tau_p'(a)\tau_i'(b)] \qquad (9.3.1)$$

Ensuite, on définit l'élément $\Gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}=\hat{m}^{011}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}\in Hom(A\otimes T,\Omega^2)=\mathcal{HK}(3)^{01}$ par

$$\Gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a;b\tau_j')=\hat{m}^{011}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(a;b\tau_j')=\frac{1}{2}\ b\ d\phi^{jp}\ d\tau_p(a) \qquad (9.3.2)$$

Cela fournit une cochaîne $\hat{m}^{\cdot\cdot 1}=(\hat{m}^{011}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'},\hat{m}^{101}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'})\in\check{\mathrm{C}}^1(\mathfrak{B};\mathcal{HK}(3)^{\cdot\cdot})$

9.4. Soit $\mathfrak{b}'' = \{\tau_i''\} \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}'' = \psi\mathfrak{b}'$. Définissons un élément $-H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} = \hat{m}^{002}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} \in Hom(T, \Omega^2) = \mathcal{HK}(3)^{00}$ par

$$-H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}(a\tau_i'') = \hat{m}^{002}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}(a\tau_i'') =$$

$$= -\frac{1}{6}a\ tr\big\{\ell_i''(\psi)^\phi \ell(\psi)^\phi \ell(\phi) - \ell_i''(\psi)^\phi \ell(\phi)\ell(\psi)^\phi +$$

$$+\ell_i''(\phi)\ell(\psi)^\phi \ell(\phi) - \ell_i''(\psi)^\phi \ell(\phi)\ell(\phi)\big\} - \frac{1}{2}\ [d\psi\ d\phi]^{ip}\tau_p(a) \qquad (9.4.1)$$

Rappelons que $\ell(\phi) := \phi^{-1}d\phi$, $\ell_i''(\psi) := \psi^{-1}\tau_i''(\psi)$ et $x^\phi := \phi^{-1}x\phi$.

Cela fournit une cochaîne $\hat{m}^{\cdot\cdot 2} = (\hat{m}^{002}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}) \in \check{C}^2(\mathfrak{B}; \mathcal{HK}(3)^{\cdot\cdot})$.

En rassemblant, on définit la 2-cochaîne

$$\hat{m}^{\mathcal{HK}} = (m^{\cdot\cdot 0}, m^{\cdot\cdot 1}, m^{\cdot\cdot 2}) \in \check{C}^2(\mathfrak{B}; \mathcal{HK}(3))$$

9.5. *Théorème.* Si l'on désigne par $d_{\mathcal{CHK}}$ la différentielle totale dans $\check{C}^\cdot(\mathfrak{B}; \mathcal{HK}(3))$, on aura $d_{\mathcal{CHK}}(\hat{m}^{\mathcal{HK}}) = \delta(\epsilon_3^{\mathcal{HK}}) + \mu(\beta_3^{CH})$.

En effet, on trouve $h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}$ de la condition

$$d_c\{,\,\}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = Qh_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} \qquad (9.5.1)$$

Après on trouve $H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}$ de la condition

$$d_c h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} = QH_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} \qquad (9.5.2)$$

Ensuite, on vérifie que

$$d_c H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'''} = -\iota\beta_3^{CH}(\chi, \psi, \phi) \qquad (9.5.3)$$

(où $\mathfrak{b}''' = \chi\mathfrak{b}''$). Cela fournit la partie Koszul - Čech de notre cocycle.

Ensuite, on trouve $\Gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}$ de la condition

$$d_c\gamma'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = d_H\Gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} \qquad (9.5.4)$$

Enfin, on vérifie que

$$d_c\Gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} = -d_H H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} \qquad (9.5.5)$$

et

$$-d_c\gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} + Q\Gamma_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} + d_H h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = 0 \qquad (9.5.6)$$

Les relations (9.5.1) - (9.5.6), combinées avec 8.6, sont équivalentes à notre théorème.

Cela est analogue, en dimension 3, de [GMS], 5.10 - 5.13. En langage "catégorique", les structures prémembranaires forment une "2-gerbe" lié par Ω^3, dont la classe est representée par la forme β_3^{CH}.

§10. Troisième Koszul - de Rham

10.1. Dans cette section on va introduire un bicomplexe tordu $\mathcal{KR}(3)^{\cdot\cdot}$, dit *le troisième Koszul - de Rham.*

Définissons les plongements

$$\iota_n : \ \Omega^n \longrightarrow Hom(\Lambda^{n-2}T, \Omega^2)$$

par la règle usuelle

$$\iota_n\omega(\tau_1, \dots, \tau_{n-2}) = i_{\tau_{n-2}} i_{\tau_{n-3}} \dots i_{\tau_1}\omega$$

Supposons que p est inversible dans k. On définit le morphisme

$$d_{DR} : \ Hom(\Lambda^{p-1}, \Omega^2) \longrightarrow Hom(\Lambda^p, \Omega^2)$$

par $d_{DR} = -d_{Ch} - E$, où

$$d_{Ch}f(\tau_1, \dots) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([\tau_i, \tau_j], \dots, \hat{\tau}_i, \dots, \hat{\tau}_j, \dots) + \sum_i (-1)^{i+1}\tau_i f(\dots, \hat{\tau}_i, \dots)$$

et

$$Ef(\tau_1, \dots, \tau_p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} (-1)^i d\langle \tau_i, f(\dots, \hat{\tau}_i, \dots)\rangle$$

On utilisera la notation $d^{(0)}_{DR}$ pour les opérateurs d_{DR} définis ci-dessus; ils nous serviront comme les différentielles dans la 0-ième ligne du notre Koszul - de Rham.

10.2. *Lemme.* $d^{(0)}_{DR}\iota_{p+1} = -\iota_{p+2}d.$

Donc les morphismes ι_n donnent lieu à l'inclusion (si $k \supset \mathbb{Q}$) du complexe de de Rham tronqué et decalé

$$\Omega^{[3} := \sigma_{\geq 3}\Omega^{\cdot}[3] : \ 0 \longrightarrow \Omega^3 \longrightarrow \Omega^4 \longrightarrow$$

dans la ligne

$$0 \longrightarrow Hom(T, \Omega^2) \xrightarrow{d^{(0)}_{DR}} Hom(\Lambda^2 T, \Omega^2) \xrightarrow{d^{(0)}_{DR}} \dots \qquad (10.2.1)$$

Par contre, cette ligne n'est pas un complexe, car $d^{(0)2}_{DR} \neq 0$.

10.3. Suivant l'usage, on définit les opérateurs de Koszul

$$Q : \ Hom(\Lambda^n T, \Omega^2) \longrightarrow Hom(S^2 T \otimes \Lambda^{n-1}T, \Omega)$$

par

$$Qf(\tau_1, \tau_2; \dots) = \mathrm{Sym}_{12}\langle \tau_1, f(\tau_2, \dots)\rangle$$

10.4. On introduit l'opérateur (en supposant que $n(n-1)$ est inversible dans k)

$$R : \ Hom(S^2 T \otimes \Lambda^{n-3}T, \Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^n T, \Omega^2)$$

par

$$Rf(\tau_1, \ldots, \tau_n) =$$

$$= -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i<j<k} (-1)^{i+j+k} \mathrm{Cycle}_{ijk}\ df([\tau_i, \tau_j], \tau_k; \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots, \hat{\tau}_k, \ldots)$$

10.5. *Lemme.* $d_{DR}^{(0)2} = RQ$.

10.6. *Première ligne.* On introduit les opérateurs

$$d_{DR}^{(1)}: \quad Hom(S^2T \otimes \Lambda^{n-2}T, \Omega) \longrightarrow Hom(S^2T \otimes \Lambda^{n-1}T, \Omega)$$

(en supposant que n est inversible dans k) par $d_{DR}^{(1)} = d_{Ch} + E$.

Ici d_{Ch} est la différentielle de Chevalley, après l'identification

$$Hom(S^2T \otimes \Lambda^{\cdot}T, \Omega) = Hom(\Lambda^{\cdot}T, Hom(S^2T, \Omega)) = C^{\cdot}(T^{\mathrm{Lie}}, Hom(S^2T, \Omega))$$

Explicitement,

$$d_{Ch}f(\tau', \tau''; \ldots) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f(\tau', \tau''; [\tau_i, \tau_j], \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots) +$$

$$+ \sum_i (-1)^{i+1} \tau_i f(\tau', \tau''; \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots) + \sum_i (-1)^i \mathrm{Sym}_{\tau', \tau''} c([\tau_i, \tau'], \tau''; \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots)$$

D'un autre côté, $E = E' + E''$,

$$E'f(\tau', \tau''; \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_i (-1)^i \mathrm{Sym}_{\tau', \tau''} \tau' f(\tau'', \tau_i; \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots)$$

et

$$E''f(\tau', \tau''; \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_i (-1)^i d\langle \tau_i, f(\tau', \tau''; \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots)\rangle$$

10.7. *Lemme.* $Qd_{DR}^{(0)} = d_{DR}^{(1)}Q$

10.8. *Lemme.* Définissons l'opérateur de Koszul

$$Q: \ Hom(S^2T, \Omega) \longrightarrow Hom(S^3T, A)$$

par

$$Qf(\tau, \tau', \tau'') = \mathrm{Cycle}_{\tau, \tau', \tau''}\ \langle \tau, f(\tau', \tau'')\rangle \tag{10.8.1}$$

Cet opérateur est un morphisme de T^{Lie}-modules.

Par définition, les opérateurs de Koszul

$$Q: \ Hom(S^2T \otimes \Lambda^n T, \Omega) \longrightarrow Hom(S^3T \otimes \Lambda^n T, A)$$

seront induits par (10.8.1), i.e.

$$Qf(\tau, \tau', \tau''; \ldots) = \mathrm{Cycle}_{\tau, \tau', \tau''}\ \langle \tau, f(\tau', \tau''; \ldots)\rangle \tag{10.8.2}$$

10.9. On va définir le Koszul - de Rham $\mathcal{KR}(3)^{\cdot\cdot} = \{\mathcal{KR}(3)^{ij}\}$. Il sera concentré dans la domain $0 \leq i+j \leq 3,\ 0 \leq j \leq 2$, le premier degré i étant le degré de de Rham et le deuxième degré j étant le degré de Koszul.

La 0-ième ligne sera (10.2.1) tronquée:

$$\mathcal{KR}(3)^{\cdot 0}:\ Hom(T,\Omega^2) \overset{d_{DR}^{(0)}}{\longrightarrow} \ldots \overset{d_{DR}^{(0)}}{\longrightarrow} Hom(\Lambda^4 T,\Omega^2)$$

La première ligne sera

$$\mathcal{KR}(3)^{\cdot 1}:\ Hom(S^2T,\Omega) \overset{d_{DR}^{(1)}}{\longrightarrow} Hom(S^2T\otimes T,\Omega) \overset{d_{DR}^{(1)}}{\longrightarrow} Hom(S^2T\otimes\Lambda^2T,\Omega)$$

La deuxième ligne sera

$$\mathcal{KR}(3)^{\cdot 2}:\ Hom(S^3T,A) \overset{d_{DR}^{(2)}}{\longrightarrow} Hom(S^3T\otimes T,A)$$

avec $d_{DR}^{(2)} = d_{Ch} + E$,

$$d_{Ch} f(\tau',\tau'',\tau''';\tau) = \tau f(\tau',\tau'',\tau''') - \mathrm{Cycle}_{\tau,\tau',\tau''}\ f([\tau,\tau'],\tau'',\tau''')$$

et

$$Ef(\tau',\tau'',\tau''';\tau) = -\frac{1}{2}\ \mathrm{Cycle}_{\tau,\tau',\tau''}\ \tau' f(\tau'',\tau''';\tau)$$

Les flèches Q ont été définies dans 10.3 et 10.8. En utilisant Lemme 10.8 on vérifie

10.10. *Lemme.* $Qd_{DR}^{(1)} = d_{DR}^{(2)}Q$.

Les flèches

$$R^{i1}:\ \mathcal{KR}(3)^{i1} = Hom(S^2T\otimes\Lambda^iT,\Omega) \longrightarrow Hom(\Lambda^{i+3}T,\Omega^2)$$

$(i=0,1)$ ont été définies dans 10.4.

10.11. Enfin, on définit la flèche

$$R^{02}:\ \mathcal{KR}(3)^{i1} = Hom(S^3T,A) \longrightarrow Hom(S^2T\otimes\Lambda^2T,\Omega)$$

par

$$R^{02}f(\tau',\tau'';\tau_1,\tau_2) = -\frac{1}{6}[df(\tau',\tau'';[\tau_1,\tau_2]) + \mathrm{Sym}_{\tau',\tau''}\ \mathrm{Alt}_{12}\ df(\tau',[\tau'',\tau_1],\tau_2)]$$

10.12. *Théorème.* On a les relations: $d_{DR}^{20}R^{01} = R^{11}d_{DR}^{01}$ et $d_{DR}^{11}d_{DR}^{01} = QR^{01} + R^{02}Q$.

Donc, les opérateurs d_{DR}, Q et R définissent sur $\mathcal{KR}(3)^{\cdot\cdot}$ une structure d'un bicomplexe tordu. On désigne par $(\mathcal{KR}(3), d_{\mathcal{KR}})$ le complexe simple associé.

L'inclusion décrite après 10.2 induit l'inclusion de complexes

$$\iota:\ \Omega^{[3,6]} := \sigma_{\leq 6}\sigma_{\geq 3}\Omega^{\cdot}[3] \hookrightarrow \mathcal{KR}(3) \qquad (10.12.1)$$

10.13. Soit $\mathfrak{b} = \{\tau_i\}$ une base abélienne. On a déjà vu un élément intéressant $\{,,\}_{\mathfrak{b}} \in Hom(S^3T, A) = \mathcal{KR}(3)^{02}$,

$$\{a\tau_i, b\tau_j, c\tau_k\}_{\mathfrak{b}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Sym}_{a\tau_i, b\tau_j}\tau_k(a)\tau_i(b)\tau_j(c) = -\frac{1}{6}\mathrm{Sym}_{a\tau_i, b\tau_j, c\tau_k}\tau_k(a)\tau_i(b)\tau_j(c),$$

cf. 8.5.

Disons qu'une cochaîne $x = (x^{02}, x^{11}, x^{20}) \in \mathcal{KR}(3)^2$ est *un cocycle intéressant* si $x^{02} = \{,,\}_{\mathfrak{b}}$ (pour une $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$) et $d_{\mathcal{KR}}x = 0$.

10.14. *Théorème.* Introduisons les éléments $\langle,;\rangle_{\mathfrak{b}} \in Hom(S^2T \otimes T, \Omega) = \mathcal{KR}(3)^{11}$,

$$\langle a\tau_i, b\tau_j; c\tau_k\rangle_{\mathfrak{b}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Sym}_{a\tau_i, b\tau_j}\tau_k(a)\tau_i(b)d\tau_j(c) - \frac{1}{2}d\{a\tau_i, b\tau_j, c\tau_k\}_{\mathfrak{b}}$$

et $c_{\mathfrak{b}} \in Hom(\Lambda^3T, \Omega^2) = \mathcal{KR}(3)^{20}$,

$$c_{\mathfrak{b}}(a\tau_i, b\tau_j, c\tau_k) = \frac{1}{6}\mathrm{Alt}_{a\tau_i, b\tau_j, c\tau_k}\tau_k(a)d\tau_i(b)d\tau_j(c)$$

Alors $m_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{KR}} := (\{,,\}_{\mathfrak{b}}, \langle,;\rangle_{\mathfrak{b}}, c_{\mathfrak{b}})$ est un cocycle intéressant.

En composantes, cela signifie que

$$d_{DR}\{,,\}_{\mathfrak{b}} - Q\langle,;\rangle_{\mathfrak{b}} = 0 \tag{10.14.1}$$

$$d_{DR}\langle,;\rangle_{\mathfrak{b}} - R\{,,\}_{\mathfrak{b}} + Qc_{\mathfrak{b}} = 0 \tag{10.14.2}$$

$$d_{DR}c_{\mathfrak{b}} + R\langle,;\rangle_{\mathfrak{b}} = 0 \tag{10.14.3}$$

En effet, on trouve $\langle,;\rangle_{\mathfrak{b}}$ de la condition (10.14.1), après on trouve $c_{\mathfrak{b}}$ de la condition (10.14.2), et enfin on vérifie (10.14.3).

Le cocycle $m_{\mathfrak{b}}^{\mathcal{KR}}$ est analogue, en dimension 3, de la partie Koszul - de Rhamienne $(-\langle,\rangle_{\mathfrak{b}}, c_{\mathfrak{b}})$ de la structure vertex $v_{\mathfrak{b}}$, 7.4 , 7.5.

§11. Troisième cocycle de Chern - Simons raffiné

11.1. Maintenant passons au bicomplexe $\check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{KR}(3)^{\cdot})$, le degré de Čech étant comme d'habitude le deuxième. On désigne par $(\check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{KR}(3)), d_{\mathcal{CKR}})$ le complexe simple associé. On suppose que 30 est inversible dans k.

L'inclusion ι, (10.11.1), induit le morphisme de complexes

$$\mu: \ CS(3) = C^{\cdot}(GL_n(A), \Omega^{[3,5\rangle}) \longrightarrow \check{C}^{\cdot}(\mathfrak{B}; \mathcal{KR}(3))$$

Rappelons la troisième forme de Chern - Simons (cf. 3.12) $\beta_3 = (\beta^{03}, \beta^{12}, \beta^{21}) \in CS(3)^3$, où $\beta^{03} \in Hom(GL_n(A)^3, \Omega^3)$,

$$\beta^{03}(\chi, \psi, \phi) = \frac{1}{6}\ tr\{\phi^{-1}\psi^{-1}\chi^{-1}\ d\chi d\psi d\phi\},$$

$\beta^{12} \in Hom(GL_n(A)^2, \Omega^4)$ est défini dans 3.10, et $\beta^{21} \in Hom(GL_n(A), \Omega^{5,\mathrm{fer}})$,

$$\beta^{21}(\phi) = -\frac{1}{60}\ tr\{(\phi^{-1}d\phi)^5\}$$

11.2. Introduisons une cochaîne $\hat{m}_{\mathcal{KR}} = (\hat{m}_{\mathcal{KR}}^{ijk}) \in \check{\mathrm{C}}^2(\mathfrak{B}; \mathcal{KR}(3))$.

Les composantes de degré de Čech 0: on pose

$$\hat{m}_{\mathcal{KR}}^{\cdot\cdot 0} = (\hat{m}_{\mathcal{KR}}^{020}, \hat{m}_{\mathcal{KR}}^{110}, \hat{m}_{\mathcal{KR}}^{200}) = (\{,,\}_{\mathfrak{b}}, \langle,;\rangle_{\mathfrak{b}}, c_{\mathfrak{b}}) \in \check{\mathrm{C}}^0(\mathfrak{B}; \mathcal{KR}(3)^{\cdot\cdot})$$

cf. 10.12, 10.13.

11.3. *Les composantes de degré de Čech* 1. Soient $\mathfrak{b} = \{\tau_i\},\ \mathfrak{b}' = \{\tau_i'\} \in \mathfrak{B},\ \mathfrak{b}' = \phi\mathfrak{b}$. Rappelons la forme $-h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} \in Hom(S^2T, \Omega) = \mathcal{KR}(3)^{01}$ définie dans 9.3.

D'un autre côté, définissons une forme $h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} \in Hom(\Lambda^2 T, \Omega^2) = \mathcal{KR}(3)^{10}$ par l'expression suivante:

$$-h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}(b\tau_j', c\tau_k') = \frac{1}{4} tr\{\phi^{-1}c\tau_k'(\phi)\phi^{-1}d\phi\ \phi^{-1}b\tau_j'(\phi)\phi^{-1}d\phi\}+$$

$$+\frac{1}{12}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ tr\{\phi^{-1}c\tau_k'(\phi)\phi^{-1}b\tau_j'(\phi)(\phi^{-1}d\phi)^2\}+$$

$$+\frac{1}{12}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ tr\big\{dc\ [\phi^{-1}\tau_k'(\phi)\phi^{-1}b\tau_j'(\phi) + \phi^{-1}b\tau_j'(\phi)\phi^{-1}\tau_k'(\phi)]\ \phi^{-1}d\phi\big\}+$$

$$+\frac{1}{12}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ tr\big\{[\phi^{-1}c\ d\tau_k'(\phi)\phi^{-1}b\tau_j'(\phi) + \phi^{-1}b\tau_j'(\phi)\phi^{-1}c\ d\tau_k'(\phi)]\ \phi^{-1}d\phi\big\}-$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}\ c\ d\tau_k'(\phi)\phi^{-1}]^{jp}\tau_p'(b)+$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}d\phi\phi^{-1}\ c\tau_k'(\phi)\phi^{-1}]^{jp}\tau_p'(b)-$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}\ b\tau_j'(\phi)\phi^{-1}]^{kp}\ d\tau_p'(c)+$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}\ b\tau_j'(\phi)\phi^{-1}d\phi\phi^{-1}]^{ku}\tau_u'(c)+$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}d\phi\phi^{-1}]^{jp}\tau_p'(c)\tau_k'(b) - \frac{1}{2}[d\phi\phi^{-1}]^{ju}\ \tau_u'(c)\ [d\phi\phi^{-1}]^{kv}\ \tau_v'(b)-$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}\ dc\ \tau_k'(\phi)\phi^{-1}]^{jp}\tau_p'(b)-$$

$$-\frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}]^{ju}\ d\tau_u'(c)\tau_k'(b) - \frac{1}{4}\mathrm{Alt}_{b\tau_j', c\tau_k'}\ [d\phi\phi^{-1}]^{kw}\ \tau_w'(b)\ d\tau_j'(c)$$

On pose

$$\hat{m}_{\mathcal{KR}}^{\cdot\cdot 1} = (\hat{m}_{\mathcal{KR}}^{011}, \hat{m}_{\mathcal{KR}}^{101}) = (-h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}, h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}) \in \check{\mathrm{C}}^1(\mathfrak{B}; \mathcal{KR}(3)^{\cdot\cdot})$$

11.4. *La composante de degré de Čech* 2:

$$\hat{m}_{\mathcal{KR}}^{002} = (-H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''}) \in \check{\mathrm{C}}^2(\mathfrak{B}; \mathcal{KR}(3)^{00}),$$

où $-H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} \in Hom(T, \Omega^2) = \mathcal{KR}(3)^{00}$ est écrit dans 9.4.

En rassemblant,

$$\hat{m}_{\mathcal{KR}} = (\{,,\}_{\mathfrak{b}}, \langle,;\rangle_{\mathfrak{b}}, c_{\mathfrak{b}};\ -h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}, h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'};\ -H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''})$$

11.5. *Théorème.* $d_{\mathcal{CKR}}(\hat{m}_{\mathcal{KR}}) = \mu(\beta_3)$.

En composantes, c'est exprimé par 9 relations:

$$-d_c H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''\mathfrak{b}'''} = \iota\beta^{03}(\chi, \psi, \phi) \tag{11.5.1}$$

si $\mathfrak{b}''' = \chi\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{b}'' = \psi\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{b}' = \phi\mathfrak{b}$; ceci est une partie du Théorème 9.5;

$$d_{DR} H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} + d_c h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} = \iota\beta^{12}(\psi, \phi) \tag{11.5.2}$$

$$d_{DR} h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} + R h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} + d_c c_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = \iota\beta^{21}(\phi) \tag{11.5.3}$$

$$-d_{DR} h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} - Q h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} + d_c\langle,;\rangle_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = 0 \tag{11.5.4}$$

Encore deux relations qui font partie du 9.5:

$$Q H_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} - d_c h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}''} = 0 \tag{11.5.5}$$

et

$$-Q h_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} + d_c\{,,\}_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'} = 0 \tag{11.5.6}$$

et enfin, les 3 relations du Théorème 10.14.

En effet, on dérive la formule compliquée de 11.3 pour $h'_{\mathfrak{b}\mathfrak{b}'}$ de l'équation (11.5.4). Ensuite on obtient la forme β^{12} de l'équation (11.5.2) (sic!). Enfin, on vérifie que la relation (11.5.3) est satisfaite.

Bibliographie

[BD] A.Beilinson, V.Drinfeld, Chiral algebras, *AMS Colloquium Publications*, v. **51**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[GMS] V.Gorbounov, F.Malikov, V.Schechtman, Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids, *Inv. Math.*, **155** (2004), 605 - 680.

[Gr] A.Grothendieck, Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 215 - 305, North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968.

[S] V.Schechtman, Definitio nova algebroidis verticiani, *Prépublication du Laboratoire Emile Picard*, **271**, Toulouse, 2003.