

Nombres de Catalan

Anthony SAINT-CRIQ

Encadré par Vadim SCHESCHTMAN

Sommaire

I	Définition de la suite	2
II	Formule close	3
A	Rayon de convergence de la fonction génératrice	3
B	Établissement de la formule	5
C	Comportement asymptotique	6
III	Autres interprétations en combinatoire	7
IV	Représentation intégrale, série réciproque	8
A	Prolongement méromorphe	8
B	Série réciproque	8
C	Représentation intégrale	9
V	Plus d'interprétations	11
A	Chemins de Dyck et diagrammes de Young	11
B	Des montagnes et des tas de pièces	12
VI	Systèmes de racines et bases distinguées	14
A	Systèmes de racines	14
B	Groupe de Weyl	18
	Bibliographie	19

I Définition de la suite

Originellement, EULER s'est intéressé au problème du nombre de triangulations d'un polygône convexe.

Considérons un polygône convexe régulier à n sommets, $n \geq 2$. Notons t_n le nombre de triangulations possibles. On voit immédiatement que $t_2 = 1$ et $t_3 = 1$. Quant au carré, il y a deux diagonales, donc deux triangulations possibles, ie $t_4 = 2$. Que valent les termes successifs ? Obtenons une relation de récurrence.

Choisissons une arête du $(n + 1)$ -gone comme notre base. On peut construire plusieurs triangles en fonction du choix du troisième sommet.

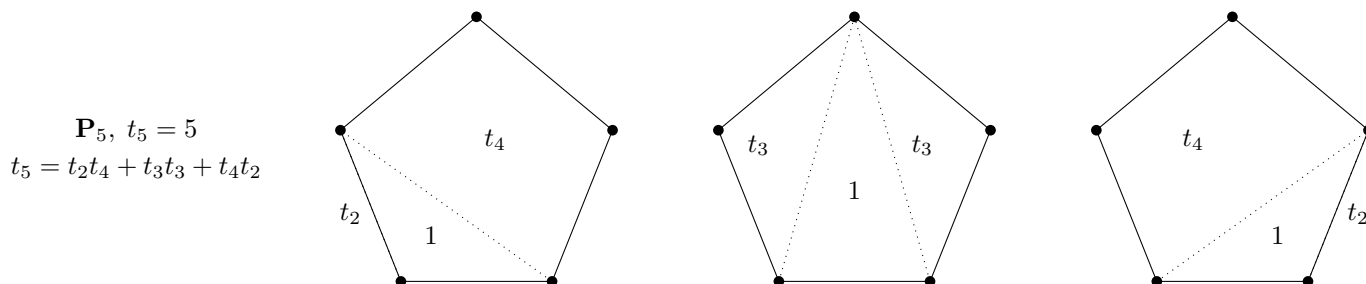


Figure 1 : Établissement de la relation de récurrence, cas du pentagone \mathbf{P}_5

Ainsi, on obtient, pour un triangle choisi deux nouveaux polygones, à k et $(n - k)$ sommets. Il y aura donc $t_k t_{n-k}$ triangulations possibles, dans le cas du triangle déjà choisi à partir de la base.

Ainsi, on somme finalement toutes les possibilités : on obtient

$$t_{n+1} = \sum_{k=2}^n t_k t_{n-k}$$

Aujourd'hui, on préfère numéroter notre suite non pas à partir de $n = 2$, mais plutôt $n = 0$. Aussi, on pose maintenant $c_n = t_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. On a donc la récurrence classique, qui définit les nombres de Catalan :

$$c_0 = 1 \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$

Voici les 30 premières valeurs de c_n (suite A000108 de l'OEIS, la plus complète de tout le site) :

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900,
 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,
 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452, 18367353072152, 69533550916004,
 263747951750360, 1002242216651368

II Formule close

Le but est de trouver une expression close donnant c_n indépendamment des termes précédents. L'astuce typique est de passer par la fonction génératrice.

Posons :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad |x| < R \quad \text{pour un certain } R \geq 0$$

Aussi, f vérifiera une relation fonctionnelle, qu'une autre fonction (dont la série entière est connue) vérifiera aussi, et sous réserve que les rayons des deux fonctions sont non nuls, on identifiera les coefficients du développement.

A Rayon de convergence de la fonction génératrice

On voudrait montrer que $R > 0$. Une majoration des c_n est-elle possible à partir de la seule relation de récurrence explicitée précédemment ? La réponse est oui, mais il y a du travail. Le rayon de la fonction génératrice est de $1/4$, mais il n'existe aucune preuve à ce jour n'utilisant pas la formule close donnant les c_n . En revanche, on peut montrer que le rayon est au moins égal à $1/6$, ce qui sera suffisant. [Vi]

Lemme :

Pour $n \geq 4$, on pose :

$$g(n) = (n+1)^2 \left(\frac{2}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2} \right)$$

Alors la suite $(g(n))_{n \geq 4}$ est décroissante, et converge vers $2 + \frac{\pi^2}{3}$.

De plus, pour $n \geq 37$, on a :

$$5,29 \approx 2 + \frac{\pi^2}{3} < g(n) < 6$$

Prouver ce lemme nous permettra à terme d'obtenir la majoration :

$$c_n \leq \frac{6^n}{n^2}$$

Fixons donc $n \geq 4$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{2}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2} &= \frac{2}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \right\}^2 \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k(n-k)} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^2} \right\} \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{k^2} + \frac{2}{k(n-k)} \right) \quad \text{en ré-indicesant } k' = n-k \text{ dans la seconde somme} \\ &= \frac{2}{n^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right\} \right) \\ &= \frac{2}{n^2} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n} H_{n-1} \right) \quad \text{en ré-indicesant et en posant } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$g(n) = 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n} H_{n-1}\right)$$

Or, on sait que $H_n = \gamma + \ln(n) + O\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{2}{n} H_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Ainsi, il vient finalement :

$$g(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\pi^2}{3}$$

Reste à prouver la décroissance de la suite :

$$\begin{aligned} g(n) > g(n+1) &\iff 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \zeta(2) - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n} H_{n-1}\right) \\ &> 2 \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 \left(1 + \zeta(2) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n+1} H_n\right) \\ &\iff 1 + \zeta(2) - \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n} H_{n-1} > 1 + \zeta(2) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{2}{n+1} H_n \\ &\quad \text{car } n > n+1 \iff \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^2 \\ &\iff -\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} H_{n-1} - \frac{2}{n+1} H_n > 0 \\ &\iff H_{n-1} - \frac{n}{n+1} H_n > \frac{1}{2n} \\ &\iff -\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} H_n > \frac{1}{2n} \\ &\iff H_n > \frac{3(n+1)}{2n} \end{aligned}$$

$(H_n)_{n \geq 4}$ est croissante, $H_4 = \frac{25}{12} > 2$.

De plus, $\left(\frac{3(n+1)}{2n}\right)_{n \geq 4}$ est décroissante, avec $\frac{3 \times (4+1)}{2 \times 4} = \frac{15}{8} < 2$.

Ainsi, $(g(n))_{n \geq 4}$ est décroissante. En calculant directement, on obtient : $g(37) \approx 5,998 < 6$, d'où la preuve du lemme. \square

Proposition :

La majoration suivante est possible :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n \leq \frac{6^n}{n^2}$$

Ainsi, le rayon de convergence de la fonction génératrice f est au moins égal à $1/6$.

Informatiquement, on vérifie que la majoration est bel et bien vraie pour les rangs $n \in \llbracket 0, 37 \rrbracket$. On va montrer le reste par récurrence forte : supposons la majoration vérifiée à tous les rangs $k \leq n$, avec $n \geq 37$. On a :

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= 2c_0c_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} = 2c_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k} \leq \frac{2 \times 6^n}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6^k \times 6^{n-k}}{k^2(n-k)^2} \\
&= 6^n \left(\frac{2}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2} \right) = \frac{6^n}{(n+1)^2} g(n) \\
&\leq \frac{6^n}{(n+1)^2} \times 6 = \frac{6^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire. Ainsi, la majoration se tient pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc finalement :

$$R \geq 1/6 > 0$$

□

B Établissement de la formule

On va chercher une relation fonctionnelle. C'est GOLDBACH qui l'a trouvée le premier, alors qu'EULER avait deviné une expression pour $f(x)$.

Pour $|x| < R$, on a, par la formule du produit de CAUCHY :

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^n$$

Ainsi, on obtient :

$$1 + x f(x)^2 = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n+1} x^{n+1} = c_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = f(x)$$

L'idée afin de deviner l'expression de $f(x)$, c'est de résoudre cette équation polynomiale de degré 2. On trouve :

$$f(x) \stackrel{?}{=} \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Comme $f(0) = c_0 = 1$, on va poser : $\varphi(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ et montrer que $\varphi \equiv f$. φ est-elle développable en série entière ? Quel est le rayon de convergence ? On rappelle :

$$\forall |x| < 1, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \alpha \in]0, 1[$$

avec $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \dots \times (\alpha-n+1)}{n!}$ le coefficient binomial généralisé.

Ainsi, si $|-4x| < 1$, i.e si $|x| < 1/4$, on a :

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n 4^n x^n$$

D'un autre côté, on a :

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{1/2(1/2-1)\dots(1/2-n+1)}{n!} = \frac{1/2 \times 3/2 \times \dots \times (2n-3)/2}{n!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n! (2n-1)} \times 1 \times \dots \times (2n-1) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n! (2n-1)} \times \frac{(2n)!}{2 \times \dots \times 2n} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n! (2n-1)} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{4^n (2n-1)} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\sqrt{1-4x} = - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2x-1} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}$$

Ainsi donc, il vient finalement :

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n-1}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} \frac{x^n}{4n+2}$$

Donc φ est développable en série entière en 0, et le rayon de convergence est de $1/4$. En particulier, sur le disque ouvert $B(0, 1/6)$, on a f et φ holomorphes et vérifiant la même équation fonctionnelle ; on peut identifier, pour obtenir :

$$c_n = \frac{1}{4n+2} \binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1) \times (2n+1) \times (2n)!}{2(2n+1) \times (n+1)^2 n!^2} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Remarque : en général, les auteurs ne vérifient pas que le rayon de la fonction génératrice f est non nul ; l'identification des coefficients est alors impossible (à rayon nul c'est impossible d'utiliser cet argument).

C Comportement asymptotique

On rappelle la formule de STIRLING :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

En insérant cette formule directement dans l'expression de c_n , on obtient, après simplifications :

$$c_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n}{n^{3/2} \sqrt{\pi}}$$

III Autres interprétations en combinatoire

On considère l'alphabet $\Sigma = \{“(”, ”)\}$. Un mot de DYCK est un mot X de Σ^* tel que X possède autant de fois chaque lettre, et tel que tout préfixe de X ne contienne pas plus de fois la lettre ”)” que la lettre ”(”. Par exemple, le mot $((()(()))$ est un mot de DYCK, alors que $()()$ n'en n'est pas un.

Théorème fondamental :

Le nombre de mots de DYCK de longueur $2n$ est c_n .

On établit la preuve par récurrence forte. Notons ϵ le mot vide (le neutre du monoïde (Σ^*, \cdot) où l'opération est la concaténation), et notons D_n le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$. On a :

- $D_0 = 1$: le seul mot possible est le mot vide ϵ .
- Supposons que $D_k = c_k$ pour tout $k \leq n$. Soit X un mot de DYCK de longueur $2(n+1)$. X commence nécessairement par la lettre ”(”. Ainsi, cette parenthèse se fermant à un certain moment (éventuellement immédiatement ou à la fin), on peut extraire une décomposition $X = (a)b$, où a et b sont des mots de DYCK (éventuellement le mot vide). En notant $2k$ la longueur de a , on voit que b est de longueur $2n - 2k = 2(n - k)$. Il y a donc $D_k D_{n-k}$ possibilités, en supposant que a est de longueur $2k$. La longueur de a n'étant aucunement déterminée, elle peut varier entre 0 et $2n$ (toujours paire ceci dit). Ainsi, on obtient :

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^n D_k D_{n-k} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = c_{n+1}$$

D'où l'hérédité. □

Corollaire :

Le nombre de vecteurs de $\{-1, 1\}^{2n}$ dont les sommes partielles des coordonnées soient toutes positives et dont la somme totale soit nulle vaut c_n .

En effet, il suffit de remplacer ”(” par ”+1” et ”)” par ”-1” dans la proposition précédente ; un préfixe correspond à une somme partielle, et le bon parenthésage correspond à la positivité de la somme partielle.

Corollaire :

Le nombre de façons de calculer un produit non associatif de $n+1$ termes vaut c_n .

À tout produit correspond un parenthésage unique, ce qui vient d'être traité.

De ce fait, puisqu'à un produit, on peut associer un unique arbre binaire **plein**, et réciproquement, on obtient :

Corollaire :

Le nombre d'arbres binaires pleins à $n+1$ nœuds vaut c_n .

IV Représentation intégrale, série réciproque

A Prolongement méromorphe

On voudrait trouver une fonction $s \mapsto C(s)$ méromorphe sur \mathbb{C} , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C(n) = c_n$. On va directement utiliser la formule close et la fonction Gamma.

On pose, pour $\Re(s) > 1$: $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-s} dt$.

On rappelle que la fonction Γ d'EULER vérifie : $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$, et $\forall \Re(s) > 1$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

En introduisant la fonction B (Bêta) par $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, on obtient, par deux changements de variables successifs dans \mathbb{R}^2 , la relation fondamentale :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

À l'aide de cette relation, on peut montrer la formule de duplication (qui n'est pas l'objet de ce compte-rendu) :

$$2^{1-2s} \sqrt{\pi} \Gamma(2s) = \Gamma(s)\Gamma(s+1/2)$$

On avait $c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, donc on peut poser :

$$C(s) = \frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+2)}$$

En remarquant que $\Gamma(2s+1) = 2s\Gamma(2s)$, et en utilisant la formule de duplication, on arrive à l'expression telle que présentée dans [Qi] :

$$C(s) = \frac{4^s \Gamma(s+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(s+2)}$$

B Série réciproque

Une question peut être de savoir quelle est la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{c_n}$. En utilisant l'équivalent établi en première section, on obtient la convergence de la série. Notons κ la somme de la série. L'idée originale vient de [Ce].

On aura besoin de la valeur de $B(n+1, n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$:

$$B(n+1, n+1) = \frac{n!^2}{(2n+1)!}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \kappa &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2n+1) \frac{n!^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2n+1) B(n+1, n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ (n+1)(2n+1) \int_0^1 t^n (1-t)^n dt \right\} \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2n+1) t^n (1-t)^n \right\} dt \end{aligned}$$

(*) les termes sont tous positifs

À l'aide de **WolframAlpha**, on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2n+1)s^n = \frac{3s+1}{(1-s)^3}$ pour $|s| < 1$, à vérifier.

On a : $\frac{1}{(1+s)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-3}{n} s^n$ pour $|s| < 1$, avec :

$$\binom{-3}{n} = \frac{(-3)(-3-1)\dots(-3-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n \times 3 \times 4 \times \dots \times (3+n-1)}{n!} = \frac{(-1)^n (n+2)!}{2 \times n!} = \frac{(-1)^n}{2} (n+1)(n+2)$$

D'où, on obtient :

$$\frac{1}{(1-s)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} s^n, \quad |s| < 1$$

Ainsi, il vient, toujours pour $|s| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{3s+1}{(1-s)^3} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3(n+1)(n+2)}{2} s^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} s^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n(n+1)}{2} s^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} s^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n(n+1)}{2} s^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n^2 + 3n + n^2 + 3n + 2}{2} s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n^2 + 3n + 1) s^n \end{aligned}$$

Et on a bien : $(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1$, d'où l'identité.

Ainsi, pour $|t(1-t)| < 1$, ie pour $t \in [1-\varphi, \varphi] \supset [0, 1]$, on a[†] :

$$\frac{3t(1-t)+1}{(1-t(1-t))^3} = \frac{1+3t-3t^2}{(1-t+t^2)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2n+1)t^n(1-t)^n$$

Ainsi, on obtient :

$$\kappa = \int_0^1 \frac{1+3t-3t^2}{(1-t+t^2)^3} dt$$

Là encore, à l'aide de **WolframAlpha**, on obtient une primitive de cette fonction[‡] :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{9} \left[\frac{3(2t-1)(t^2-t+3)}{(1-t+t^2)^2} + 4\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} = \frac{1+3t-3t^2}{(1-t+t^2)^3}$$

On obtient finalement, en évaluant l'intégrale à l'aide de la primitive :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{c_n} = 2 + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$$

C Représentation intégrale

Le but est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4-x^2} dx$$

On détaille la preuve présentée succinctement dans **[Qi]**. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+$:

$$I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

[†] : ici, φ désigne le nombre d'or, à savoir $(1+\sqrt{5})/2$, la racine positive de $X^2 - X - 1$

[‡] : les calculs sont longs et fastidieux, et ne seront pas présentés ici, mais ils ont été vérifiés à la main et ne sont pas insurmontables

On aura besoin des primitives suivantes :

- $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right] \right\} = \sqrt{a^2 - x^2}$
- $\frac{d}{dx} \left\{ \sqrt{a^2 - x^2} + x \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right\} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right)$

On déduit directement de la première primitive la valeur : $I_0(a) = a^2 \frac{\pi}{4}$. Ensuite, en appliquant une intégration par parties, on obtient pour commencer :

$$\begin{aligned} I_{n+2}(a) &= \int_0^a x^{n+2} \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \left[\frac{x^{n+2}}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \right]_{x=0}^a - \int_0^a (n+2) \frac{x^{n+1}}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right) dx \\ &= \frac{a^{n+4}\pi}{8} - \frac{n+2}{2} \int_0^a x^{n+2} \sqrt{a^2 - x^2} dx - \frac{(n+2)a^2}{2} \int_0^a x^{n+1} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) dx \\ &= \frac{a^{n+4}\pi}{8} - \frac{n+2}{2} I_{n+2}(a) - \frac{(n+2)a^2}{2} \int_0^a x^{n+1} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) dx \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\frac{n+4}{2} I_{n+2} = \frac{a^{n+4}\pi}{8} - \frac{(n+2)a^2}{2} \int_0^a x^{n+1} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) dx$. On a de plus, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^a x^{n+1} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) dx &= \left[x^{n+1} \left\{ \sqrt{a^2 - x^2} + x \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right\} \right]_{x=0}^a - \int_0^a (n+1)x^n \left\{ \sqrt{a^2 - x^2} + x \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right\} dx \\ &= \frac{a^{n+2}\pi}{4} - (n+1) \underbrace{\int_0^a x^n \sqrt{a^2 - x^2} dx}_{=I_n(a)} - (n+1) \underbrace{\int_0^a x^{n+1} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) dx} \end{aligned}$$

$$\text{D'où, on obtient : } \int_0^a x^{n+1} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) dx = \frac{a^{n+1}\pi}{4(n+2)} - \frac{n+1}{n+2} I_n(a).$$

Ainsi, en ré-introduisant cette expression dans l'expression de $I_{n+2}(a)$ trouvée précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2}(a) &= \frac{2}{n+4} \left\{ \frac{a^{n+4}\pi}{8} - \frac{(n+2)a^2}{2} \left[\frac{a^{n+2}\pi}{4(n+2)} - \frac{n+1}{n+2} I_n(a) \right] \right\} \\ &= \frac{2}{n+4} \left\{ \frac{a^{n+4}\pi}{8} - \frac{a^{n+4}\pi}{8} + \frac{(n+1)a^2}{2} I_n(a) \right\} \\ &= \frac{n+1}{n+4} a^2 I_n(a) \end{aligned}$$

En particulier, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{2n}(a) &= \frac{2n-1}{2n+2} a^2 I_{2n-2}(a) = \frac{2n-1}{2(n+1)} a^2 I_{2(n-1)}(a) = \frac{2n-1}{2(n+1)} \times \frac{2n-3}{2(n)} a^4 I_{2(n-2)}(a) \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times (1)}{2^n (n+1) \times (n) \times \dots \times (2)} a^{2n} I_0(a) = \frac{a^{2n+2}\pi}{4 \times 2^n (n+1)!} \times \frac{(2n) \times \dots \times (1)}{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times (2)} \\ &= \frac{a^{2n+2}\pi}{2^{n+2} (n+1)!} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \left(\frac{a}{2} \right)^{2n+2} \pi = c_n \left(\frac{a}{2} \right)^{2n+2} \pi \end{aligned}$$

En particulier, en $a = 2$, on obtient finalement :

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx$$

V Plus d'interprétations

A Chemins de Dyck et diagrammes de Young

En général, les auteurs ne passent pas par ce résultat ([St], [Go]), mais beaucoup d'interprétations combinatoires se déduisent directement du langage des mots de DYCK.

On souhaite dénombrer le nombre de chemins sous-diagonaux sur une grille, allant de $(0,0)$ à (n,n) , en ne faisant que des pas vers le Nord ou vers l'Est. De tels chemins sont appelés **chemins de Dyck**. On dénote par \mathbb{D}_n l'ensemble de ces chemins.

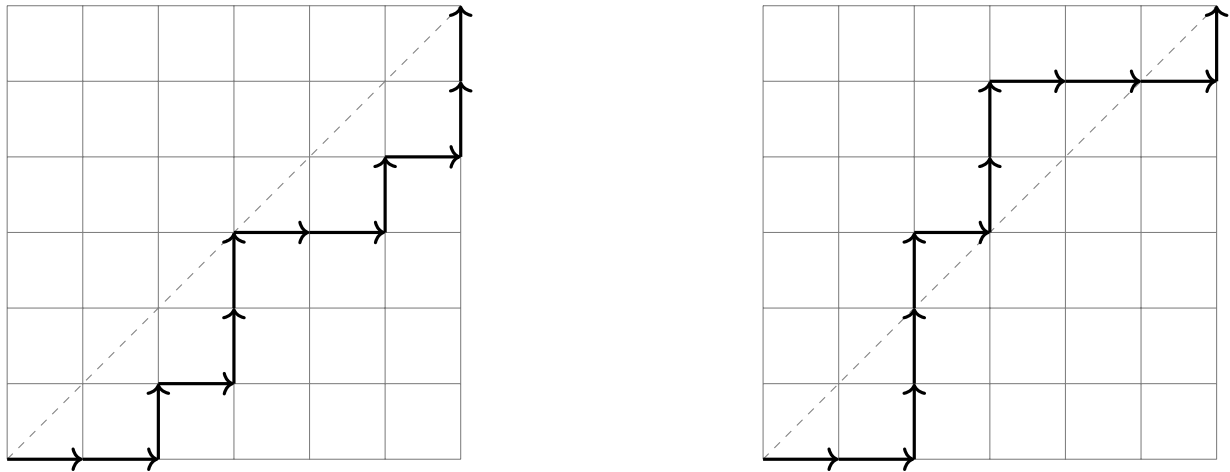


Figure 2 : À gauche, un chemin valide. À droite, un non-valable.

Proposition :

Le nombre de chemins de DYCK joignant $(0,0)$ à (n,n) vaut c_n .

En dénotant par N un pas vers le Nord et pas E un pas vers le Sud, on identifie de manière unique un chemin par un mot de l'alphabet $\Sigma = \{E, N\}$. Sur l'illustration de la Figure 2, on aura que le chemin de gauche sera noté $EENENNEENENN$, tandis que celui de droite sera noté $EENNNENNEEEN$. Par ce biais, il est naturel qu'un chemin de DYCK de \mathbb{D}_n corresponde à un mot de DYCK de longueur $2n$ sur notre alphabet (E correspondant à une parenthèse ouvrante, et N à une parenthèse fermante). Il y en a donc bien c_n .

Intéressons-nous maintenant aux diagrammes de YOUNG. C'est un empilement de cases, en alignant les lignes sur la gauche, de sorte que chaque ligne n'ait pas plus de cases que la ligne qui la précède.

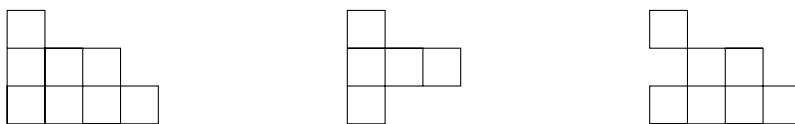


Figure 3 : À gauche, le diagramme de YOUNG noté $(4,3,1)$. Au centre et à droite, deux diagrammes non valides.

Si on se donne deux diagrammes de YOUNG $\lambda = (\ell_1, \dots, \ell_r)$ et $\mu = (m_1, \dots, m_s)$ avec $r \leq s$, alors on dit que λ est inclus dans μ , et on note $\lambda \subseteq \mu$, si : $\forall k \leq r, \ell_k \leq m_k$. On visualise l'inclusion en tant qu'inclusion des diagrammes eux-même :

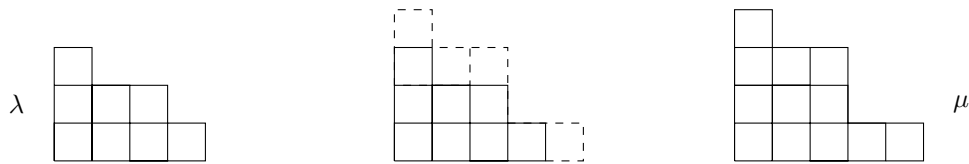


Figure 4 : L'inclusion $\lambda \subseteq \mu$

On dénotera par \mathbb{Y}_n l'ensemble des diagrammes de YOUNG inclus dans $(n-1, n-2, \dots, 1)$. On a :

Proposition :

\mathbb{Y}_n est un ensemble de cardinal c_n .

Pour prouver ceci, il y a une bijection immédiate $\mathbb{D}_n \approx \mathbb{Y}_n$. On explicite ici cette bijection Φ par un procédé constructif. La première étape consiste à retourner ce diagramme en alignant plutôt les lignes à droites, et à faire apparaître le diagramme $(n, n-1, \dots, 1)$ ainsi qu'une diagonale. Ensuite, il suffit de considérer la diagonale comme joignant le point $(0,0)$ au point (n,n) , et de construire le chemin de DYCK en longeant le bord du diagramme. Par exemple, avec $\lambda = (4, 3, 1)$ et $n = 5$, on obtient $\Phi(\lambda) = ENENEENENN$:

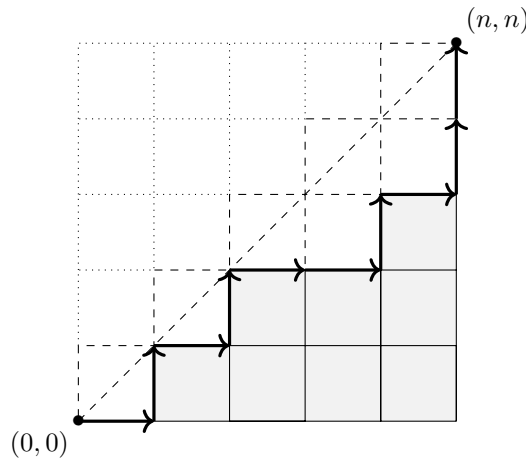


Figure 5 : La construction de $\Phi(\lambda)$

L'application Φ ainsi construite est clairement bijective (le développer dans le cas général serait quelque peu fastidieux...). Dans le doute, elle est au moins surjective, et on construit facilement une application duale $\Psi : \mathbb{D}_n \rightarrow \mathbb{Y}_n$ surjective. En vertu du théorème de CANTOR-BERNSTEIN, on conclut sur la bijection entre les deux ensembles, et donc que $\text{card } \mathbb{Y}_n = c_n$.

□

B Des montagnes et des tas de pièces

En tant que corollaire, on a une autre interprétation faisant intervenir des chemins. Cette fois-ci, il est question de joindre $(0,0)$ à $(2n,0)$, en n'utilisant que les pas $(1,1)$ et $(1,-1)$ et en ne descendant pas "sous le niveau de la mer", à savoir que la seconde coordonnée reste positive. On appelle un tel chemin une *chemin de montagne*, et on note par \mathbb{M}_n les chemins de montagne joignant $(0,0)$ à $(2n,0)$. Un exemple de chemin valide :

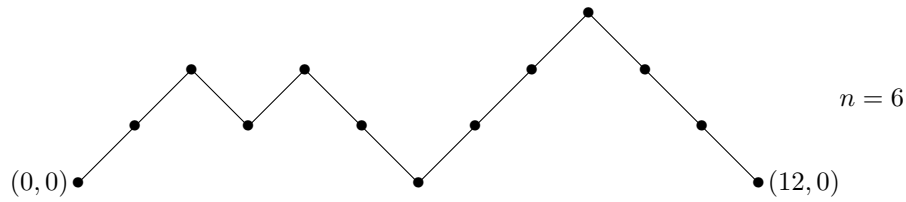


Figure 6 : Un chemin de montagne

Proposition :

\mathbb{M}_n est un ensemble de cardinal c_n .

On peut une fois de plus déduire ceci des mots du langage de DYCK. En effet, notons par H le pas $(1, 1)$, et pas B le pas $(1, -1)$. À tout chemin $c \in \mathbb{M}_n$ correspond un unique mot de DYCK de longueur $2n$ sur l'alphabet $\Sigma = \{H, B\}$ (H correspondant à la parenthèse ouvrante). Sur l'exemple de la Figure 6, le chemin sera donné par : $HHBHBHBBHHBBB$.

Il y a donc bien c_n chemins de montagne joignant $(0, 0)$ à $(2n, 0)$, ie $\text{card } \mathbb{M}_n = c_n$.

Une conséquence directe intervient sur un problème de la vie quotidienne. Combien existe-il d'empilements de billes, en fixant une base de n billes ? Notons par \mathbb{E}_n l'ensemble de tels empilements. Par exemple :



Figure 7 : Plusieurs empilements possibles

Proposition :

\mathbb{E}_n est aussi un ensemble de cardinal c_n .

En effet, il est possible d'exhiber une bijection entre \mathbb{M}_n et \mathbb{E}_n . Contentons-nous de la **preuve sans mots** suivante :

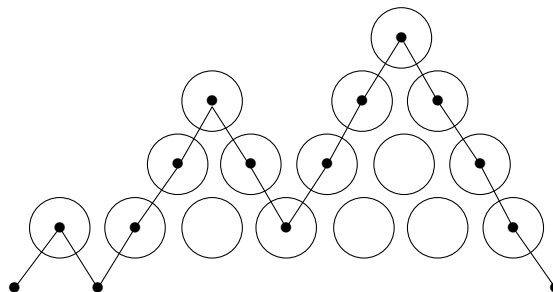


Figure 8 : Bijection entre \mathbb{E}_n et \mathbb{M}_n

VI Systèmes de racines et bases distinguées

A Systèmes de racines

Définition :

Soit V un K -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On munit V d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Un **système de racines** sur V est un ensemble fini Φ de vecteurs, appelés **racines**, tel que :

- $\text{Vect}(\Phi) = V$
- $\forall (\lambda, \alpha) \in K \times \Phi, \lambda \alpha \in \Phi \implies \lambda = \pm 1$
- Stabilité par la réflexion par rapport à l'hyperplan $\ker \langle \cdot | \alpha \rangle$ (hyperplan normal à $\text{Vect}(\alpha)$) :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \Phi^2, \beta - 2 \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \in \Phi$$

- La projection sur $\text{Vect}(\alpha)$ est un multiple demi-entier de α :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \Phi^2, 2 \frac{\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$$

On appelle **rang** du système Φ la dimension de V , et on note $\text{rg}(\Phi) = n$.

Remarque : $0 \in \Phi$ est impossible, car on aura alors $2 \times 0 \in \Phi$.

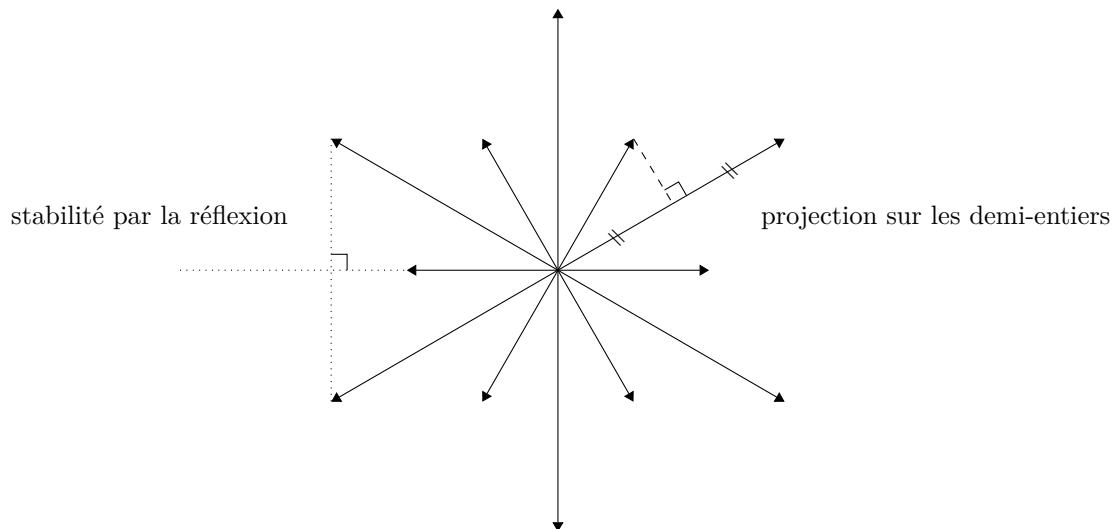


Figure 9 : Un exemple de système de racines : le système G_2 de rang 2

Définition : (le système de type A_n)

On se place sur l'espace vectoriel V_n défini comme l'hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} par $V_n = \ker(e_1^* + \dots + e_{n+1}^*)$. On considère alors $X_n = V_n \cap \mathbb{Z}^{n+1}$ l'ensemble des vecteurs de V_n à coordonnées entières. On définit ainsi :

$$A_n = \{\alpha \in X_n / \|\alpha\|_2 = \sqrt{2}\}$$

Ainsi, les racines de A_n sont les vecteurs de V_n dont les coordonnées sont toutes nulles, sauf deux qui sont $+1$ et -1 . On remarque donc : $\text{card } A_n = n(n+1)$.

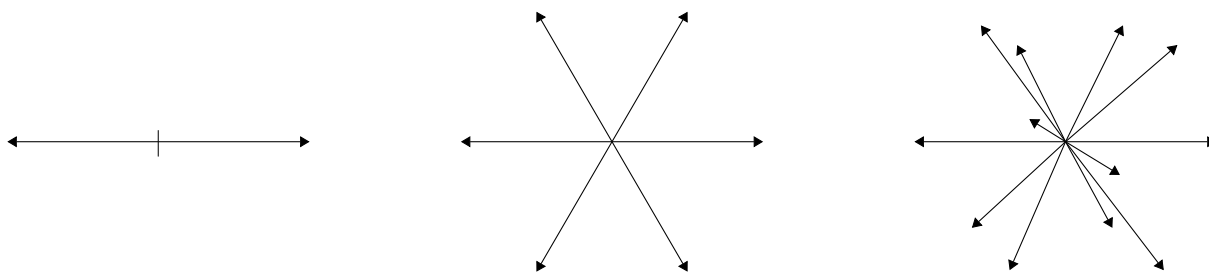


Figure 10 : Les trois premiers systèmes de type A_n : A_1 , A_2 et A_3

Définitions :

Soit Φ un système de racines sur l'espace $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.

Une partie $\Delta \subset \Phi$ est appelée **base**, ou **système fondamental** de racines, si :

- Δ est une base de V
- Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r$ et $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in \Delta^r$ de sorte que $\alpha = \sum_{k=1}^r \lambda_k \beta_k$ avec tous les λ_k de même signe.

Les racines $\alpha \in \Delta$ sont appelées **racines simples**.

Pour une racine $\alpha \in \Phi$, on note $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} \lambda_\beta(\alpha) \beta$ la décomposition dans la base, ou pour alléger les notations :

$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} \lambda_\beta \beta$. On remarque que les coefficients sont données par les formes linéaires de la base duale Δ^* : $\lambda_\beta(\alpha) = \beta^*(\alpha)$.

On définit la **hauteur** d'une racine par la quantité $\text{ht}(\alpha) = \sum_{\beta \in \Delta} \beta^*(\alpha)$. En particulier, la hauteur est toujours non nulle, et son signe est le signe des coefficients dans la décomposition de la racine dans la base.

On définit l'ensemble des **racines positives** par : $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi / \text{ht}(\alpha) > 0\}$. L'ensemble des racines négatives est donc $\Phi^- = \Phi \setminus \Phi^+ = -\Phi^+$.

Par exemple, dans le cas de A_2 , on peut choisir $\Delta = \{\alpha, \beta\}$, et on aura $A_2^+ = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$:

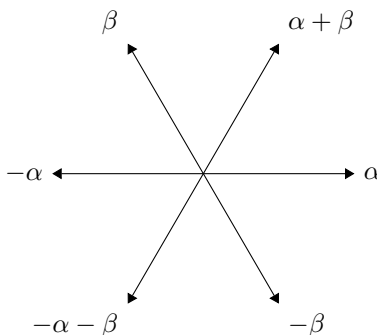


Figure 11 : Le système de racines A_2

Existe-t-il toujours une base ? La réponse est oui, on possède un procédé constructif. Pour $v \in V$, notons $H_v = \ker\langle \cdot | v \rangle$ l'hyperplan normal à $\text{Vect}(v)$.

Par finitude de Φ , l'ensemble $X = \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$ ne peut être V tout entier. On appelle donc les vecteurs de $V \setminus X$ des vecteurs **réguliers**, et les vecteurs de X les vecteurs **singuliers**. Ainsi, $v \in V$ est régulier si et seulement si $\forall \alpha \in \Phi, \langle v | \alpha \rangle \neq 0$, et est singulier si et seulement si $\exists \alpha \in \Phi / \langle v | \alpha \rangle = 0$.

Proposition :

Soit Φ un système de racines sur $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Φ possède au moins une base.

Preuve : On simplifie les idées présentées dans [Hu].

Soit X l'ensemble des vecteurs singuliers, soit $\mathcal{Z} = V \setminus X$ celui des vecteurs réguliers. Soit $\gamma_0 \in \mathcal{Z}$. On pose $P = \{\alpha \in \Phi / \langle \alpha | \gamma_0 \rangle > 0\}$. On pose enfin $\Delta = \{\alpha \in P / \forall \beta \in P, \alpha - \beta \notin P\}$: c'est l'ensemble des racines $\alpha \in P$ qui ne se décomposent pas en $\alpha = \beta + \gamma$ avec $(\beta, \gamma) \in P^2$. On va prouver que Δ est une base de Φ .

Soit $N = \Phi \setminus P = \{\alpha \in \Phi / \langle \alpha | \gamma_0 \rangle < 0\}$. On a, par le second point de la définition d'un système de racines et la linéarité de $\langle \cdot | \gamma_0 \rangle$: $N = -P$.

- Δ engendre P par certaines combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs ; supposons qu'il existe $\alpha \in P$ tel que α ne soit aucune combinaison entière de vecteurs de Δ . En particulier, choisissons α_0 non décomposable de sorte que α_0 minimise la quantité $\langle \alpha | \gamma_0 \rangle$, où α porte sur les racines de P non décomposables.

$\alpha_0 \notin \Delta$, sinon on écrirait $\alpha_0 = 1 \cdot \alpha_0$, qui est une décomposition de la forme souhaitée. Ainsi, par définition de Δ , $\alpha_0 = \beta_0 + \beta_1$, avec $(\beta_0, \beta_1) \in P^2$. On a : $\langle \alpha_0 | \gamma_0 \rangle = \langle \beta_0 | \gamma_0 \rangle + \langle \beta_1 | \gamma_0 \rangle$. Les trois termes de cette égalité sont strictement positifs, par définition de P . Ainsi, on a : $\langle \alpha_0 | \gamma_0 \rangle > \langle \beta_0 | \gamma_0 \rangle$ et $\langle \alpha_0 | \gamma_0 \rangle > \langle \beta_1 | \gamma_0 \rangle$.

β_0 et β_1 ne peuvent être tous deux décomposables, sinon α_0 le serait aussi en tant que leur somme. Disons que β_0 ne l'est pas. Alors $\langle \alpha_0 | \gamma_0 \rangle > \langle \beta_0 | \gamma_0 \rangle$, et β_0 non décomposable, ce qui contredit la minimalité de $\langle \alpha_0 | \gamma_0 \rangle$.

Ainsi, toutes les racines de P sont décomposables de la forme voulue. En particulier, $N = -P$ est engendré par des combinaisons entières à coefficients négatifs, et donc le second point de la définition d'une base est vérifié.

- Δ engendre Φ , qui engendre lui-même tout V , donc Δ est une famille génératrice. Montrons qu'elle est aussi linéairement indépendante.
 - ▷ Tout d'abord, si $(\alpha, \beta) \in \Delta^2$ avec $\alpha \neq \beta$, on a : $\langle \alpha | \beta \rangle \leq 0$.

Supposons le contraire : soit $(\alpha, \beta) \in \Delta^2$ de sorte que $\langle \alpha | \beta \rangle > 0$. Supposons que $\dim V \geq 2$. En effet, le cas $\dim V = 1$ se traite très facilement à part, le seul système possible étant de la forme $\{\alpha, -\alpha\}$. Ainsi, on peut assurer que $\alpha \neq \beta$ est possible, et donc α et β sont linéairement indépendants. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors : $0 < \langle \alpha | \beta \rangle^2 < \langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle$. Observons :

$$0 < \left(\frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \right) \left(\frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \right) = 4 \frac{\langle \alpha | \beta \rangle^2}{\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle} < 4$$

Ainsi, en tant que produit d'entiers (quatrième point de la définition d'un système de racines), cette quantité vaut soit 1, soit 2, soit 3. Dans l'anneau \mathbb{Z} des entiers, on obtient, par l'irréductibilité de 1, 2 et 3 et positivité de chacun des deux entiers du produit : soit $\frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$, soit $\frac{2\langle \alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle}$ vaut 1. Dans les deux cas, on écrira la symétrie de α ou de β par rapport à l'autre vecteur (l'expression du troisième point de la définition d'un système de racines), et on obtiendra que $\alpha - \beta$ ou $\beta - \alpha$ est une racine. Ainsi, les deux en seront une, et l'une sera dans P puisqu'elles sont opposées.

Si $\alpha - \beta$ est dans P , alors $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$ est une décomposition de α , et dans l'autre cas, $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$ une décomposition de β . C'est contradictoire.

Ainsi, $\langle \alpha | \beta \rangle \leq 0$.

▷ Supposons donc que l'on aie $\sum_{k=1}^r \lambda_k \alpha_k = 0$ avec $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$. On élimine déjà les λ_k nuls de cette somme, et en regroupant d'un côté les coefficients négatifs, et de l'autre les positifs, on obtient, en nommant ce vecteur ω :

$$\omega = \sum_{k=1}^p t_k \alpha_k = \sum_{\ell=1}^q s_\ell \beta_\ell$$

où les t_k et les s_ℓ sont strictement positifs. En développant, on obtient :

$$0 \leq \langle \omega | \omega \rangle = \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^q t_k s_\ell \underbrace{\langle \alpha_k | \beta_\ell \rangle}_{\leq 0} \leq 0$$

Ainsi, on a : $\|\omega\| = 0$, i.e $\omega = 0$.

En particulier, $\langle \gamma_0 | \omega \rangle = 0 \leq 0$. En développant par linéarité de $\langle \cdot | \gamma_0 \rangle$ les deux expressions pour ω , on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^p t_k \underbrace{\langle \gamma_0 | \alpha_k \rangle}_{>0} = 0 \\ \sum_{\ell=1}^q s_\ell \underbrace{\langle \gamma_0 | \beta_\ell \rangle}_{>0} = 0 \end{cases}$$

Par positivité des t_k et s_ℓ , on obtient : $t_k = s_\ell = 0$, ce qui conclut à l'indépendance linéaire de la famille Δ . Ainsi, Δ est une base de V .

Ceci conclut donc que Δ est une base de Φ , et les racines positives sont les racines de P .

Remarque : on pourrait aussi montrer que toutes les bases sont de la forme construite précédemment, mais les arguments sont assez similaires, et ce serait plus rébarbatif qu'utile. Si le résultat doit intervenir, il sera utilisé sans preuve.

B Groupe de Weyl

Définition : (groupe de Weyl)

Soit Φ un système de racines sur $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Pour $u \in V$, on note σ_u la symétrie vectorielle définie par :

$$\sigma_u(v) = v - \frac{2\langle u|v \rangle}{\langle u|u \rangle}u$$

On appelle **groupe de Weyl** de Φ le groupe noté \mathcal{W}_Φ (ou simplement \mathcal{W} s'il n'y a pas d'ambiguïté) engendré par les symétries de Φ :

$$\mathcal{W}_\Phi = \langle \{\sigma_\alpha, \alpha \in \Phi\} \rangle$$

Remarque : \mathcal{W}_Φ est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}(\Phi)$ des permutations de Φ . De plus, on a une action de conjugaison remarquable du groupe des endomorphismes de $GL(V)$ laissant invariant Φ : $f \circ \sigma_\alpha \circ f^{-1} \equiv \sigma_{f(\alpha)}$.

Proposition :

Soit Φ un système de racines, soit \mathcal{W} son groupe de Weyl. Soit Δ une base de Φ associée aux racines positives Φ^+ . On note \mathcal{Z} l'ensemble des vecteurs réguliers de V . On a :

- Si $\gamma \in \mathcal{Z}$, alors il existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tel que $\langle \sigma(\gamma) | \alpha \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$.
- Si Δ' est une autre base de Φ , alors $\Delta' = \sigma(\Delta)$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{W}$. De plus, si $\sigma(\Delta) = \Delta$, alors $\sigma \equiv \text{id}$.
- Si $\alpha \in \Phi$, il existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tel que $\sigma(\alpha) \in \Delta$.

Preuve : ...

Bibliographie

- [Vi] <https://arxiv.org/pdf/1511.08555.pdf>, Mark B. Villarino, "*The convergence of the Catalan Number Generating Function*"
- [Qi] www.mdpi.com/2227-7390/5/3/40/pdf, Feng Qi & Bai-Ni Guo, "*Integral representations of the Catalan numbers and Their Applications*"
- [Ce] juanmarqz.wordpress.com/2009/07/29/whole-sum-of-the-reciprocal-catalan-numbers/, Ian Marqz's "*Ciencias exactas*" blog, original idea by Qiaochu Yuan
- [St] Richard P. Stanley, "*Enumerative combinatorics vol.II*", 1999 ; mainly the famous *Exercice 19*.
- [Go] <https://arxiv.org/pdf/1112.0381.pdf>, E. M. Gorsky, "*A braid group action on parking functions*"
- [Br] <https://www.math.univ-toulouse.fr/~schechtman/brillon-these-n.pdf>, Laura Brillon, "*Matrices de Cartan, bases distinguées et systèmes de Toda*", thèse soutenue le 27 juin 2017
- [Hu] <http://www.auburn.edu/~huanghu/math7360/Lie%20Algebra-3.2.pdf>, H. Huang's Lie algebra courses, chapter III-2