**Algèbres vertex associées aux variétés algébriques**

*(de Bernard DWORK à Cumrun VAFA)*

*Rapport oral*[1]

Vadim Schechtman

Ceci est un rapport sur un travail commun avec V.Hinich, A.Vaintrob, A.Gerasimov, F.Malikov et V.Gorbounov.

**1.** Le désir d'associer une algèbre vertex à une variété (comme la notion même d'une algèbre vertex) trouve sa source en physique quantique. Les physiciens croient qu'on peut associer à une variété de Calabi-Yau $X$ un modèle de la *théorie conforme des champs*, admettant une $N = 2$ supersymétrie. Ce modèle décrit le mouvement de cordes dans $X$ ("espace-temps")[2].

Bien que les physiciens connaissent beaucoup sur ces modèles, ils ne sont pas connus explicitement qu'en cas assez rares. Les exemples importants sont les hypersurfaces de Fermat. Parce que dans ce cas on peut donner une description du modèle plus ou moins complète, on les appelle "résolubles exactement".

**2.** Du point de vue d'un mathématicien, il est bien connu que les hypersurfaces des Fermat (d'ailleurs, pas nécesairemant de Calabi-Yau) sont aussi "résolubles exactement": pour ces variétés André Weil (en généralisant le calcul de Gauss) a calculé leur fonction zeta, et ce calcul etait la source de "conjectures de Weil", [W].

On va discuter l'exemple de la quintique de Fermat $\mathfrak{H}$, donnée dans $\mathbb{P}^4$ par l'equation

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 = 0 \qquad (2.1)$$

Les nombres de Betti de $\mathfrak{H}$ sont

| $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 204 | 1 | 0 | 1 |

La caractéristique d'Euler-Poincaré est $\chi(\mathfrak{H}) = -200$.

Pour trouver le nombre de Betti le plus intéressant $b_3(\mathfrak{H})$, on peut utiliser la méthode de Weil. Soit $\mu_5$ le groupe des 5-ièmes racines de l'unité; son groupe des caractères $\mu_5^*$ s'identifie à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, où $a(\text{mod}5)$ correspond à $\zeta \mapsto \zeta^a$. Le groupe $G = (\mu_5)^5$ agit sur $\mathfrak{H}$ par $(\zeta_1, \ldots, \zeta_5) \circ (x_1, \ldots, x_5) = (\zeta_1 x_1, \ldots, \zeta_5 x_5)$, donc il agit sur sa cohomologie.

Soit $X \subset G^* = (\mu_5^*)^5$ le sous-ensemble des caractères de la forme $(\chi_1, \ldots, \chi_5)$ tels que $\chi_i \neq 1$ et $\prod \chi_i = 1$. Alors $H^3(\mathfrak{H}) = \oplus_{\chi \in X} H^3(\mathfrak{H})_\chi$, avec tous $H^3(\mathfrak{H})_\chi$ de dimension 1.

Evidemment, on peut identifier $X$ avec l'ensemble des 5-uples $(a_1, \ldots, a_5)$, $1 \leq a_i \leq 4$, $\sum a_i \equiv 0(\text{mod}5)$. Il est facile à calculer $\text{card}(X) = 204$ (cf. ci-dessous).

[1] Exposé au ICM Pekin, Août 2002 (traduction de russe). Ce texte diffère de celui publié dans les Proceedings.

[2] On ne descutera que la partie *chirale* de ces modèles.

Les nombres de Hodge $h^{pq} = \dim H^p(\mathfrak{H}, \Omega^q)$ de $H^3(\mathfrak{H})$ sont

| $h^{03}$ | $h^{12}$ | $h^{21}$ | $h^{30}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 101 | 101 | 1 |

On peut arranger tous $h^{pq} \neq 0$ en "croix de Hodge"

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{30} & & \\ & & h^{21} & & \\ h^{00} & h^{11} & & h^{22} & h^{33} \\ & & h^{12} & & \\ & & h^{03} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 101 & & \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \\ & & 101 & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

**3.** *Coté miroir* (Dwork). Soit $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_5]$. Considérons *l'anneau de Milnor* de la singularité
$f(x) = 0$,

$$M = A/(\partial_i f) = \otimes_{i=1}^5 \mathbb{C}[x_i]/(x_i^4) \tag{3.1}$$

L'ensemble des monômes $Y = \{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} x_4^{n_4} x_5^{n_5} | 0 \leq n_i \leq 3\}$ est une base de $M$.

Le groupe $G$ agit sur $M$ de manière évidente; considérons le sous-groupe diagonal $\mu_5 \subset G$ et le sous-anneau de ses invariants $M^{\mu_5}$. Une base de $M^{\mu_5}$ forme le sous-ensemble

$$X = \{\prod x_i^{n_i} | \sum n_i \equiv 0 (\mathrm{mod} 5)\} \subset Y \tag{3.2}$$

On peut identifier l'ensemble $X$ avec $X$ du numéro précédent, en posant $a_i = n_i + 1$.

On définit

$$X_p := \{x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} x_4^{n_4} x_5^{n_5} \in X | \sum n_i = 5p\} \ (0 \leq p \leq 3) \tag{3.3}$$

Alors $X = \coprod_{p=0}^3 X_p$, et les cardinaux des $X_p$ sont

| $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{card}(X_p)$ | 1 | 101 | 101 | 1 |

Donc $\mathrm{card}(X_p) = h^{p,3-p}$; de plus, on a une involution $X \xrightarrow{\sim} X$ envoyant $\prod x_i^{n_i}$ en $\prod x_i^{3-n_i}$ qui induit les bijections $X_p \xrightarrow{\sim} X_{3-p}$, d'où $h^{pq} = h^{qp}$.

Ces rémarques, visiblement simples, mais profondes, sont dues a Bernard Dwork, voir les dernières lignes de [D]. En effet, le sous-espace propre $H^3(\mathfrak{H})_\chi$, avec $\chi \in X_p$, a le type de Hodge $(p, 3-p)$.

Tous cela est vrai pour une hypersurface de Fermat $\mathfrak{H}_d$ de dimension $d$ quelconque, à un point délicat près: le sous-anneau des invariants d'anneau de Milnor calcule *la partie primitive* $H^d(\mathfrak{H}_d)_{\mathrm{prim}} \subset H^d(\mathfrak{H}_d)$, qui est le sous-espace de codimension 1 pour $d$ pair.

**4.** On peut définir un plongement $X_1 \hookrightarrow H^1(\mathfrak{H}, \Omega^2)$ qui fournit une base de cet espace. En effet, un choix d'une forme de volume sur $\mathfrak{H}$ furnit l'isomorphisme $H^1(\mathfrak{H}, \Omega^2) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathfrak{H}, \mathcal{T})$, où $\mathcal{T}$ est le faisceau tangent. Alors on peut associer à un monôme $m \in X_1$ l'élément de $H^1(\mathfrak{H}, \mathcal{T})$ correspondant à la déformation $f(x) + \epsilon m$.

Ceci inspire le désir de tourner le croix de Hodge. En effet, posons $'h^{pq} = \dim H^p(\mathfrak{H}, \Lambda^q \mathcal{T})$, donc $'h^{pq} = h^{p,3-q}$. Alors on a le croix de Hodge "miroir"

$$\begin{array}{ccccc} & & {}'h^{30} & & \\ & & {}'h^{21} & & \\ {}'h^{00} & {}'h^{11} & & {}'h^{22} & {}'h^{33} \\ & & {}'h^{12} & & \\ & & {}'h^{03} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 1 & & \\ 1 & 101 & & 101 & 1 \\ & & 1 & & \\ & & 1 & & \end{array}$$

On rémarque que $\oplus_{p,q} H^p(\mathfrak{H}, \Lambda^q \mathcal{T})$ est une algèbre super-commutative, dont $\oplus_{p=0}^3 H^p(\mathfrak{H}, \Lambda^p \mathcal{T})$ est une sous-algèbre paire. D'autre part, un choix d'une forme de volume identifie ce sous-espace avec $\oplus_{p=0}^3 H^p(\mathfrak{H}, \Omega^{3-p}) = H^3(\mathfrak{H})$.

Donc, on peut associer à $\mathfrak{H}$ deux algèbres: la cohomologie de de Rham $\oplus_{p,q} H^p(\mathfrak{H}, \Omega^q)$ et la cohomologie $\oplus_{p,q} H^p(\mathfrak{H}, \Lambda^q \mathcal{T})$; une choix d'une forme de volume sur $\mathfrak{H}$ les identifie, mais cette identification ne respecte pas les structures d'algèbre.

**5.** *Symétries cachées: les structures de Batalin-Vilkovisky.* On peut remplacer l'anneau de Milnor $M$ par un objet quasi-isomorphe: le complexe de Koszul $K^{\cdot}(A, df)$. Par définition, $K^{\cdot}(A, df) = \Lambda^{\cdot}(T)$, où $T = Der(A) = \oplus_i A\partial_i$; on place $\Lambda^i(T)$ en degré $-i$; la différentielle est la convolution avec la 1-forme $df$. Muni de multiplication exterieure, $K^{\cdot}(A, df)$ devient une algèbre graduée commutative.

De plus, $\Lambda^{\cdot}(T)$ porte le crochet impair, dit de *Schouten-Nijenhuis* qui s'obtient par prolongement, par la règle de Poisson (impaire), du crochet de Lie des champs vectoriels.

Considérons les espaces des formes différentielles $\Omega^i(A) = Hom_A(\Lambda^i(T), A)$. Si l'on identifie $A$ avec $\Omega^5(A)$ par $g(x) \mapsto g(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_5$, alors $\Lambda^i(T)$ s'identifie à $\Omega^{5-i}(A)$, et la différentielle de de Rham induit la différentielle $d: \Lambda^i(T) \longrightarrow \Lambda^{i-1}(T)$ qui commute avec $df$.

Posons $\Delta = d + df$. On a l'identité fondamentale suivante,

$$\Delta(xy) - (\Delta x)y - (-1)^{|x|} x \Delta y = (-1)^{|x|}[x, y] \tag{5.1}$$

qu'on exprime en disant que $K^{\cdot}(A, \Delta)$ est une *algèbre de Batalin-Vilkovisky.*

D'autre part, considérons l'algèbre des champs polyvectoriels sur $\mathfrak{H}$, $\Lambda^{\cdot}\mathcal{T}$, avec le crochet de Schouten-Nijenhuis; après un choix d'une forme de volume, on peut l'identifier avec l'algèbre de de Rham $\Omega^{\cdot}_{\mathfrak{H}}$, donc la différentielle de de Rham induit la différentielle $d: \ \Lambda^i(\mathcal{T}) \longrightarrow \Lambda^{i-1}\mathcal{T}$, qui verifie (5.1). Donc on obtient sur $\Lambda^{\cdot}\mathcal{T}$ une structure d'un faisceau d'algèbres BV.

**6.** Soit $X$ une variété algébrique lisse. Appelons une 0-*algébroïde vertex* sur $X$ une application $c: \ \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ telle que

$$c(a\tau) = ac(\tau) + \tau(a) \tag{6.1}$$

$$c([\tau,\tau']) = \tau(c(\tau')) + \tau'(c(\tau)) \tag{6.2}$$

pour tous $a \in \mathcal{O}_X, \ \tau,\tau' \in \mathcal{T}_X$. On désigne par $\mathcal{A}lg_X^{(0)}$ l'ensemble des 0-algébroïdes vertex. Si $c, c' \in \mathcal{A}lg_X^{(0)}$ alors $c - c'$ est une 1-forme *fermée*; réciproquement, si $\omega \in \Omega_X^{1,fer}$, alors $c + \omega \in \mathcal{A}lg_X^{(0)}$. Donc, $\mathcal{A}lg_X^{(0)}$ est un $\Omega_X^{1,fer}$-torseur, dont la classe d'isomorphie $c(\mathcal{A}lg_X^{(0)})$ est égale à $c_1(X) := c_1(\mathcal{T}_X) \in H^1(X, \Omega_X^{1,fer})$.

Définition équivalente: une 0-algébroïde vertex est une structure d'un $\mathcal{D}$-module *à droite* sur $\mathcal{O}_X$. En effet, étant donnée une telle structure, on définit une application $c: \ \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ par $c(\tau) = -1\tau$.

On obtient la troisième définition équivalente en utilisant l'équivalence canonique entre $\mathcal{D}$-modules à droite et à gauche: une 0-algébroïde vertex est une structure d'un $\mathcal{D}$-module à gauche (c'est à dire, une connexion intégrable) sur $\det \mathcal{T} := \Lambda^n(\mathcal{T})$ ($n = \dim X$).

Pour $c \in \mathcal{A}lg_X^{(0)}$, soit $\mathcal{O}_c$ désigne $\mathcal{O}_X$ muni de la structure d'un $\mathcal{D}$-module à droite correspondante; considérons le complexe de de Rham $DR(\mathcal{O}_c)$; c'est un faisceau d'algèbres BV sur $X$, appelé l'*algèbre envéloppante* de $c$.

**7.** Une *algébroïde vertex* sur $X$ est une couple $\mathcal{A} = (\langle,\rangle, c)$, où $\langle,\rangle: \ \mathcal{T}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est une application symétrique, et $c: \ \mathcal{T}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_X \longrightarrow \Omega_X^1$ est une application anti-symétrique, ces applications vérifiant les propriétés suivantes:

$$\langle a\tau, b\tau'\rangle - a\langle\tau, b\tau'\rangle - b\langle a\tau,\tau'\rangle + ab\langle\tau,\tau'\rangle = -\tau'(a)\tau(b) \tag{A0}$$

$$Lie_\tau\langle,\rangle(\tau',\tau'') = \langle\tau', c_-(\tau'',\tau)\rangle + \langle\tau'', c_-(\tau',\tau)\rangle \tag{A1}$$

$$dc(\tau,\tau',\tau'') = -\frac{1}{6}\partial\{\langle\tau,[\tau',\tau'']\rangle + \langle\tau',[\tau'',\tau]\rangle + \langle\tau'',[\tau,\tau']\rangle\} \tag{A2}$$

Ici $\partial: \ \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_X^1$ est la différentielle de de Rham,

$$c_-(\tau,\tau') := c(\tau,\tau') - \frac{1}{2}\partial\langle\tau,\tau'\rangle \tag{7.1}$$

$$Lie_\tau\langle,\rangle(\tau',\tau'') = \tau(\langle\tau',\tau''\rangle) - \langle[\tau,\tau'],\tau''\rangle - \langle\tau',[\tau,\tau'']\rangle \tag{7.2}$$

$$dc(\tau,\tau',\tau'') = d_{\mathrm{Lie}}c(\tau,\tau',\tau'') + \frac{1}{3}\partial\{\langle\tau, c(\tau',\tau'')\rangle + \langle\tau', c(\tau'',\tau)\rangle + \langle\tau'', c(\tau,\tau')\rangle\} \tag{7.3}$$

où

$$d_{\mathrm{Lie}}c(\tau,\tau',\tau'') = \{c([\tau,\tau'],\tau'') - \tau(c(\tau',\tau''))\} + (\text{cycle}) \tag{7.4}$$

*Un morphisme* $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est une application $h : \mathcal{T} \longrightarrow \Omega^1_X$ telle que

$$\langle \tau, h(\tau') \rangle + \langle \tau', h(\tau) \rangle = \langle \tau, \tau' \rangle - \langle \tau, \tau' \rangle' \qquad (Mor)_{\langle , \rangle}$$

$$dh(\tau, \tau') = c(\tau, \tau') - c'(\tau, \tau') \qquad (Mor)_c$$

où

$$dh(\tau, \tau') = \tau'(h(\tau)) - \tau(h(\tau')) + h([\tau, \tau']) + \partial\{\langle \tau, h(\tau') \rangle - \langle \tau', h(\tau) \rangle\}/2 \qquad (7.5)$$

Les algébroïdes vertex sur $X$ forment un groupoïde $\mathcal{A}lg_X$ qui est un Torseur sous le groupoïde $\mathcal{G}r(\Omega_X^{[2,3\rangle})$ dont les objets sont 3-formes fermées, avec $Hom(\eta, \eta') = \{\omega \in \Omega^2_X | \ d\omega = \eta' - \eta\}$. La classe $c(\mathcal{A}lg_X) \in H^2(X, \Omega_X^{[2,3\rangle})$ est égale à $2ch_2(\mathcal{T}_X)$.

**8.** Dans [V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators. III, A.A. Kirillov Festschrift, à paraître], 6.1, on a défini le faisceau des algèbres vertex $\Lambda^{\mathrm{ch}}\mathcal{T}_X$ sur $X$, qu'on peut regarder comme une version "chirale" de l'algèbre $\Lambda^{\cdot}\mathcal{T}_X$.

Revenons à notre hypersurface de Fermat $\mathfrak{H}$. D'autre part, on peut "chiraliser" les constructions "à la Koszul" du numéro 5; en passant à la cohomologie on arrive à l'algèbre vertex $V(\mathfrak{H})$ introduite par Cumrun Vafa, [V]. Il y a quelques raisons d'attendre que les algèbres vertex $V(\mathfrak{H})$ et $H^{\cdot}(\mathfrak{H}, \Lambda^{\mathrm{ch}}\mathcal{T}_{\mathfrak{H}})$ sont isomorphes. Donc on peut proposer l'algèbre $H^{\cdot}(X, \Lambda^{\mathrm{ch}}\mathcal{T}_X)$ pour une variété de Calabi-Yau quelconque, comme un candidat sur le rôle du "modèle de Vafa" de $X$.

## Bibliographie


[D] B. Dwork, A deformation theory for the zeta function of a hypersurface, Proc. ICM 1962, Stockholm, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden, 247-259.

[V] C. Vafa, Superstring vacua, Prépublication HUTP-89/A057.

[W] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, *Bull. AMS.* **55** (1949), 497-508.