ALGÈBRES DE POISSON IMPAIRES

ET STRUCTURES DE CALABI - YAU

Vadim Schechtman

Introduction

Soit M une variété lisse. L'algèbre de champs polyvectorels $\Lambda^{\cdot}\mathcal{T}_M$, munie du crochet de Schouten - Nijenhuis et du produit exterieur, est un exemple d'une "algèbre de Poisson[1]". *Une structure de Calabi - Yau* sur $\mathcal{T}_M$ est une connexion intégrable sur $\Lambda^n\mathcal{T}_M$, où $n = \dim M$. L'ensemble $CY(\mathcal{T}_M)$ de ces structures est un torseur sous le faisceau $\Omega_M^{1,\mathrm{fer}}$ des formes fermées.

Dans cette note on définit, pour une algèbre de Poisson[1] $G^{\cdot}$ quelconque, son "complexe de de Rham" $\Omega^{\cdot}(G^{\cdot})$, et un $\Omega^{1,\mathrm{fer}}(G^{\cdot})$-torseur de structures de Calabi-Yau $CY(G^{\cdot})$. Cela se fait au moyen d'un petit jeu avec les complexes de Hochschild et de Chevalley, style [DN]. Les axiomes d'une structure CY sont une version *affaiblie* des axiomes d'une structure de *Bataline - Vilkovisky*: une structure BV donne lieu à une structure CY, mais la réciproque n'est par vraie en général. Au cas $G^{\cdot} = \Lambda^{\cdot}\mathcal{T}_M$, on retrouve $\Omega^{\cdot}(G^{\cdot}) = \Omega^{\cdot}_M$ et $CY(G^{\cdot}) = CY(\mathcal{T}_M)$.

Cette note a été écrite en 2005, après une discussion avec Dmitri Tamarkin à Copenhague en Novembre 2005; je suis très réconaissant à lui. Je remercie les organisateurs du colloque sur la Géométrie noncommutative à Copenhague, surtout Ryszard Nest, pour l'hospitalité, ainsi que V.Ginzburg, V.Hinich et B.Tsygan, de leurs idées et explications.

§1. Algèbres de Poisson[1] et de Bataline - Vilkovisky

1.1. On fixe un anneau commutatif de base k. Soit $G^{\cdot} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\, G^i$ un k-module gradué. On écrit $\tilde{x} = i$ pour $x \in G^i$.

On dit, en suivant [BD], 1.4.18, que $G^{\cdot}$ est *une algèbre de Poisson*[1] s'il est muni:
(a) d'une multiplication

$$G^{\cdot} \otimes G^{\cdot} \longrightarrow G^{\cdot} \tag{1.1.1}$$

qui fait de $G^{\cdot}$ une algèbre commutative graduée;

(b) d'un crochet impair ("antibracket")

$$[,]:\ G^i \otimes G^j \longrightarrow G^{i+j-1}$$

qui fait de $G^{\cdot Lie} := G^{\cdot}[1]$ une algèbre de Lie graduée, s'est-à-dire,

$$[x, y] = -(-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1)}[y, x] \tag{1.1.2}$$

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + (-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1)}[y,[x,z]] \tag{1.1.3}$$

(où bien

$$[[x,y],z] = [x,[y,z]] - (-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1)}[y,[x,z]]) \tag{1.1.3$'$}$$

et qui satisfait à l'axiome

$$[x,yz] = [x,y]z + (-1)^{\tilde{y}(\tilde{x}-1)}y[x,z] \tag{1.1.4}$$

Cet axiome signifie que, si l'on considère $G^{\cdot}$ comme un $G^{\cdot Lie}$-module gradué au moyen de la représentation adjointe, la multiplication (1.1.1) sera un morphisme de $G^{\cdot Lie}$-modules, d'où le nom, cf. [BD], *loc. cit.*

1.2. *Exemple.* Algèbre de Schouten - Nijenhuis d'une algébroïde de Lie.

Soit $G^{\cdot}$ est une algèbre de Poisson[1] $\mathbb{N}$-graduée, s'est-à-dire, $G^i = 0$ pour $i < 0$. Alors $A := G^0$ est une algèbre commutative, $T := G^1$ est une algèbre de Lie. T agit sur A par la regle $\tau(a) := [\tau, a]$; muni par la structure d'un A-module *à gauche* induite par la multiplication dans $G^{\cdot}$, T devient une algèbroïde de Lie sur A. De cette façon on obtient un foncteur de la catégorie des algèbres de Poisson[1] $\mathbb{N}$-graduées dans la catégorie de couples (A,T), où A est une algèbre commutative et T est une algébroïde de Lie.

Ce foncteur admèt un adjoint à gauche: étant donné un couple (A,T), on définit l'algèbre de Poisson[1] "enveloppante" $G^{\cdot}(A,T) = \Lambda^{\cdot}_A(T)$ par $G^i(A,T) = \Lambda^i_A(T)$; la multiplication est la multiplication exeterieure; le crochet est uniquement défini par les regles: $[\tau, a] = \tau(a),\ \tau \in T = G^1(A,T), a \in A = G^0(A,T)$ et $[\tau,\tau']$ coïncide avec le crochet donné sur T. On va appeler cette algebre de Poisson[1] *l'algèbre de Schouten - Nijenhuis* de T.

Cette algèbre est l'analogue impaire de la structure de Poisson usuelle sur l'algèbre symétrique $S^{\cdot}_A(T)$.

1.3. *Une algèbre de Bataline - Vilkovisky* est une algèbre de Poisson[1] $G^{\cdot}$ muni d'un opérateur de degré -1, $\Delta:\ G^i \longrightarrow G^{i-1}$ tel que

$$\Delta(xy) - \Delta(x)y - (-1)^{\tilde{x}}x\Delta(y) = (-1)^{\tilde{x}}[x,y] \tag{$BV1$}$$

et

$$\Delta^2 = 0 \tag{$BV2$}$$

1.4. Soit T une A-algébroïde de Lie. Suivant [GMS], §11, on appelle *une structure de Calabi - Yau* sur T une structure BV Δ sur l'algèbre de Schouten - Nijenhuis $\Lambda^{\cdot}_A(T)$. Étant donnée une telle structure, considérons sa composante de degré 1:

$$c := \Delta^1:\ T \longrightarrow A \tag{1.4.1}$$

Cet opérateur ("de divergence") satisfait aux propriétés:

$$c(a\tau) = ac(\tau) + \tau(A), \tag{$CY1$}$$

$$c([\tau,\tau']) = \tau c(\tau') - \tau' c(\tau) \tag{$CY2$}$$

qui sont des cas particuliers de (BV1) et (BV2) respectivement. Réciproquement, étant donné un opérateur (1.4.1) satisfaisant aux (CY1) et (CY2), il existe une seule structure BV Δ sur $\Lambda^{\cdot}_A(t)$ telle que $\Delta^1 = c$, cf. [K], §2, [GMS], §11 et [S].

Donc la donnée d'un opérateur de divergence c satisfaisant (CY1) et (CY2) peut servir comme une définition alternative de structure CY sur T. Pour des autres définitions équivalentes, on renvoie le lecteur à [GMS], §11 et [BD], 4.1.9, ou à §2 ci-dessous.

Posons $\Omega^1(T) := Hom_A(T, A)$;

$$\Omega^{1,fer}(T) := \{\omega \in \Omega^1(T) |\ \omega([\tau, \tau']) - \tau\omega(\tau') - \tau'\omega(\tau) = 0\} \tag{1.4.2}$$

Alors l'ensemble $CY(T)$ des structures CY sur T est un $\Omega^{1,fer}(T)$-torseur.

§2. Complexe de Hochschild - Chevalley d'une algébroïde Lie

Ici on rappelle la construction de [DN], Caput 1.

2.1. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et M est un $\mathfrak{g}$-module, le complexe de Chevalley $C^{\cdot}_{CH}(\mathfrak{g}, M)$ est défini par $C^i_{CH}(\mathfrak{g}, M) = Hom(\Lambda^i\mathfrak{g}, M)$ avec la différentielle

$$d_{CH}f(\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}\tau_i f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots) +$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq n+1} (-1)^{i+j} f([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots) \tag{2.1.1}$$

Si A est une algèbre commutative et M, N sont des A-modules, le complexe de Hochschild $C^{\cdot}_H(M, N)$ est défini par $C^i_H(M, N) = Hom(A^{\otimes i} \otimes M, N)$ avec la différentielle

$$d_H f(a_1, \ldots, a_{n+1}, x) = a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}, x) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots) +$$

$$+(-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}x) \tag{2.1.2}$$

Donc par exemple $H^0_{CH}(M, N) := H^0 C^{\cdot}_H(M, N) = Hom_A(M, N)$.

2.2. Soit T une A-algébroïde de Lie. On définit un bicomplexe $C^{\cdot\cdot}_{HCH}(T, A)$, dit *le (bi)complexe de Hochschild - Chevalley* de T comme cela. Tout d'abord, la 0-ième colonne

$$C^{0\cdot}_{HCH}(T, A) = C^{\cdot}_H(T, A) :\ Hom(T, A) \longrightarrow Hom(A \otimes T, A) \longrightarrow \ldots$$

et la 0-ième ligne

$$C^{\cdot 0}_{HCH}(T, A) = C^{\cdot+1}_{CH}(T, A) :\ Hom(T, A) \longrightarrow Hom(\Lambda^2 T, A) \ldots$$

Ensuite, pour $i \geq 0,\ j \geq 1$

$$C^{ij}_{HCH}(T, A) = Hom(\Lambda^i T \otimes A^{\otimes j} \otimes T, A)$$

Les différentielles horisontales sont de Chevalley, après l'identification

$$Hom(\Lambda^i T \otimes A^{\otimes j} \otimes T, A) = Hom(\Lambda^i T, Hom(A^{\otimes j} \otimes T, A))$$

Les différentielles verticales sont les Hochschilds par rapport au dernier argument.

2.3. Il faut vérifier qu'on a obtenu un bicomplexe, c'est à dire que $d_H d_{CH} = d_{CH} d_H$. Vérifierons cela d'abord au rez-de-chaussée. On a

$$d_{CH} d_H f(\tau_1, \ldots, \tau_n; a, \tau_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\ Lie_{\tau_i} d_H f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots; a, \tau_{n+1}) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} d_H f([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots; a, \tau_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\ \{\tau_i d_H f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots; a, \tau_{n+1}) -$$

$$- d_H f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots; \tau_i(a), \tau_{n+1}) - d_H f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots; a, [\tau_i, \tau_{n+1}])\} +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} d_H f([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots; a, \tau_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\ \{\tau_i(a) f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \tau_{n+1}) - \tau_i f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, a\tau_{n+1}) -$$

$$- \tau_i(a) f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \tau_{n+1}) + f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \tau_i(a)\tau_{n+1}) -$$

$$- a f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, [\tau_i, \tau_{n+1}]) + f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, a[\tau_i, \tau_{n+1}])\} +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \{a f([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots, \tau_{n+1}) -$$

$$- f([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots, a\tau_{n+1})\}$$

De l'autre côté,

$$d_H d_{CH} f(\tau_1, \ldots, \tau_n; a, \tau_{n+1}) =$$

$$= a d_{CH} f(\tau_1, \ldots, \tau_n, \tau_{n+1}) - d_{CH} f(\tau_1, \ldots, \tau_n, a\tau_{n+1}) =$$

$$= a \Bigg\{ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \tau_i f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} f([\tau_i, \tau_j], \tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \hat{\tau}_j, \ldots) \Bigg\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \tau_i f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, a\tau_{n+1}) + (-1)^{n+1} a\tau_{n+1} f(\tau_1, \ldots, \hat{\tau}_i, \ldots, \tau_n) +$$

$$+\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j+1}f([\tau_i,\tau_j],\tau_1,\dots,\hat{\tau}_i,\dots,\hat{\tau}_j,\dots,a\tau_{n+1})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}f([\tau_i,a\tau_{n+1}],\tau_1,\dots,\hat{\tau}_i,\dots,\tau_n),$$

et l'on voit aussitôt que l'on obtient le même truc.

La commutativité des carrés supérieurs résulte du

2.4. *Lemme.* Les différentielles de Hochschild

$$d_H:\ Hom(A^{\otimes n}\otimes T,A)\longrightarrow Hom(A^{\otimes(n+1)}\otimes T,A)$$

sont des morphismes de T^{Lie}-modules.

En effet,

$$Lie_{\tau'}d_Hf(a_1,\dots,a_{n+1};\tau)=$$

$$=\tau' d_Hf(a_1,\dots,a_{n+1};\tau)-\sum_{j=1}^{n+1}d_Hf(a_1,\dots,\tau'(a_j),\dots;\tau)-d_Hf(a_1,\dots,a_{n+1};[\tau',\tau])=$$

$$=\tau'(a_1)f(a_2,\dots,a_{n+1};\tau)+a_1\tau' f(a_2,\dots,a_{n+1};\tau)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\tau' f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,;\tau)-(-1)^{n+1}\tau' f(a_1,\dots,a_n;a_{n+1}\tau)+$$

$$-\tau'(a_1)f(a_2,\dots,a_{n+1};\tau)+f(\tau'(a_1)a_2,a_3,\dots,a_{n+1};\tau)+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}f(\tau'(a_1),a_2,\dots,a_ia_{i+1},\dots;\tau)+(-1)^nf(\tau'(a_1),a_2,\dots,a_n;a_{n+1}\tau)+$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\Bigg\{-a_1f(a_2,\dots,\tau'(a_j),\dots,a_{n+1};\tau)+$$

$$+\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+1}f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,\tau'(a_j),\dots;\tau)+$$

$$+(-1)^jf(a_1,\dots,a_{j-1}\tau'(a_j),\dots;\tau)+$$

$$+(-1)^{j+1}f(a_1,\dots,a_j\tau'(a_{j+1}),\dots;\tau)+$$

$$+\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+1}f(a_1,\dots,\tau'(a_j),\dots,a_ia_{i+1},\dots;\tau)+$$

$$+(-1)^nf(a_1,\dots,\tau'(a_j),\dots;a_{n+1}\tau)\Bigg\}-$$

$$-a_1f(a_2,\dots,\tau'(a_{n+1});\tau)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,\tau'(a_{n+1});\tau)+$$

$$+(-1)^{n+1}f(a_1,\dots,a_n\tau'(a_{n+1});\tau)+$$
$$+(-1)^n f(a_1,\dots,a_n;\tau'(a_{n+1})\tau)-d_Hf(a_1,\dots,a_{n+1};[\tau',\tau])$$

2.5. De l'autre côté,

$$d_H Lie_{\tau'}f(a_1,\dots,a_{n+1};\tau)=a_1Lie_{\tau'}f(a_2,\dots,a_{n+1};\tau)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i Lie_{\tau'}f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1};\tau)+$$
$$+(-1)^{n+1}Lie_{\tau'}f(a_1,\dots,a_n;a_{n+1}\tau)$$

où

$$a_1Lie_{\tau'}f(a_2,\dots,a_{n+1};\tau)=a_1\Big\{\tau'f(a_2,\dots,a_{n+1};\tau)-$$
$$-\sum_{j=2}^{n+1}f(a_2,\dots,\tau'(a_j),\dots,a_{n+1};\tau)-f(a_2,\dots,a_{n+1};[\tau',\tau])\Big\}$$

ensuite

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i Lie_{\tau'}f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1};\tau)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}\Big\{(-1)^i\tau'f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1};\tau)+$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}f(a_1,\dots,\tau'(a_j),\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1};\tau)+$$
$$+(-1)^{i+1}f(a_1,\dots,\tau'(a_ia_{i+1}),\dots,a_{n+1};\tau)+$$
$$\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{i+1}f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,\tau'(a_j),\dots,a_{n+1};\tau)+$$
$$+(-1)^{i+1}f(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_{n+1};[\tau',\tau])\Big\}$$

et

$$(-1)^{n+1}Lie_{\tau'}f(a_1,\dots,a_n;a_{n+1}\tau)=(-1)^{n+1}\tau'f(a_1,\dots,a_n;a_{n+1}\tau)+$$
$$+(-1)^n\sum_{j=1}^{n}f(a_1,\dots,\tau'(a_j),\dots;a_{n+1}\tau)+$$
$$+(-1)^n f(a_1,\dots,a_n;[\tau',a_{n+1}\tau])$$

En comparant les expressions 2.4 et 2.5, on trouve l'égalité, ce qui prouve le lemme.

2.6. Donc on a défini le double complexe $C^{\cdot\cdot}_{HCH}(T,A)$, d'où le complexe simple associe $C^{\cdot}_{HCH}(T,A)$ avec la différentielle définie par la formule usuelle

$$d_{HCH}(x^{ij})=d_{CH}(x^{ij})+(-1)^id_H(x^{ij})$$

On rémarque que

$$H^0_H(C^{i\cdot}_{CHC}(T,A)) = \Omega^i(T) := Hom_A(\Lambda^i_A(T), A),$$

d'où l'inclusion canonique du complexe de de Rham

$$\Omega^{\cdot}(T) \hookrightarrow C^{\cdot}_{HCH}(T,A)$$

En particulier

$$H^0(C^{\cdot}_{HCH}(T,A)) = \Omega^{1,fer}(T) := \mathrm{Ker}(d_{DR}:\ \Omega^1(T) \longrightarrow \Omega^2(T))$$

cf. (1.4.2).

2.7. Considérons l'élément canonique

$$e \in C^{01}_{HCH}(T,A) = Hom(A \otimes T, A),\ \ e(a,\tau) = \tau(a)$$

On a

$$d_H e(a,b;\tau) = a\tau(b) - \tau(ab) + b\tau(a) = 0$$

De même,

$$d_{CH} e(\tau, a, \tau') = Lie_{\tau'} e(a,\tau) = \tau'\tau(a) - \tau\tau'(a) - [\tau',\tau](a) = 0$$

Donc l'élément

$$\epsilon = (-e, 0) \in C^{01}_{HCH}(T,A) \oplus C^{11}_{HCH}(T,A) = C^{1}_{HCH}(T,A)$$

est un 1-cocycle dans le complexe total $C^{\cdot}_{HCH}(T,A)$.

Quand ϵ est un cobord? L'équation

$$d_{HCH} c = \epsilon,\ \ c \in C^0_{HCH}(T,A) = Hom(T,A)$$

est éuivalente à deux équations:

$$d_H c = -e,$$

i.e.

$$ac(\tau) - c(a\tau) = -\tau(a)$$

qui est le premier axiome (CY 1) d'une structure CY, et

$$d_{CH} c = 0,$$

i.e.

$$\tau c(\tau') - \tau' c(\tau) + c([\tau,\tau']) = 0$$

qui est l'axiome (CY2). Donc une structure de Calabi - Yau sur T est la même chose qu'un élément $c \in C^0_{HCH}(T,A)$ tel que $d_{HCH} c = \epsilon$.

Par conséquence, l'ensemble

$$CY(T) = \{c \in C^0_{HCH}(T, A) | d_{HCH} c = \epsilon\}$$

est un torseur sous le module

$$H^0 C^{\cdot}_{HCH}(T, A) = \Omega^{1,fer}(T)$$

comme nous avons déjà dit.

§3. Complexe de Hochschild d'une algèbre de Poisson[1].

3.1. Soit $A^{\cdot} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ un k-module gradué. Pour $a \in A^i$ on pose

$$\tilde{a} = |a| = i$$

Si $B^{\cdot}$ est un autre module gradué, on pose

$$(a \otimes b)^{\sim} = \tilde{a} + \tilde{b}$$

pour $a \otimes b \in A^{\cdot} \otimes B^{\cdot}$. Si $f : A^{\cdot} \longrightarrow B^{\cdot}$ est un morphisme, on dit que $\tilde{f} = i$ si

$$f(a)^{\sim} = \tilde{a} + i$$

Donc pour $f \in Hom(A^{\cdot \otimes n}, A^{\cdot})$, on dit que $\tilde{f} = i$ si

$$f(a_1, \ldots, a_n)^{\sim} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j + i$$

On désigne

$$Hom^i(A^{\cdot}, B^{\cdot}) = \{f \in Hom(A^{\cdot}, B^{\cdot}) | \tilde{f} = i\}$$

3.2. Soient $A^{\cdot}$ une k-algèbre associative graduée, $M^{\cdot}$ un $A^{\cdot}$-bimodule gradué. On définit le complexe de Hochschild $C^{\cdot}_H(A^{\cdot}, M^{\cdot})$ par

$$C^n_H(A^{\cdot}, M^{\cdot}) = Hom(A^{\cdot \otimes n}, M^{\cdot})$$

Pour $f \in C^n_H(A^{\cdot}, M^{\cdot})$ on pose

$$|f| = \tilde{f} + n$$

(sic!). La différentielle de Hochschild sera définie par la formule (cf. [TT], 2.3):

$$d_H f(a_1, \ldots, a_{n+1}) = (-1)^{|a_1||f| + |f| + 1} a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|f| + 1 + \sum_{p=1}^{i} (|a_p| + 1)} f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) +$$

$$+ (-1)^{|f| + \sum_{p=1}^{n} (|a_p| + 1)} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1} \qquad (3.2.1)$$

On calcule que $d_H^2 = 0$.

On aura surtout besoin de $M^{\cdot} = A^{\cdot}$.

3.3. Par exemple:

$$d_H f(a,b) = (-1)^{|a||f|+|f|+1} af(b) +$$
$$+(-1)^{|f|+|a|} f(ab) + (-1)^{|f|+|a|+1} f(a)b \tag{3.3.1}$$

De même,

$$d_H f(a,b,c) = (-1)^{|a||f|+|f|+1} af(b,c) + (-1)^{|f|+|a|} f(ab,c) +$$
$$+(-1)^{|f|+|a|+|b|+1} f(a,bc) + (-1)^{|f|+|a|+|b|} f(a,b)c \tag{3.3.2}$$

En particulier, le noyau

$$\mathrm{Ker}(d_H^1 :\ C_H^1(A^{\cdot}, M^{\cdot}) \longrightarrow C_H^2(A^{\cdot}, M^{\cdot}) =$$
$$= \{f :\ A^{\cdot} \longrightarrow M^{\cdot} \mid\ -(-1)^{\tilde{f}\tilde{a}} af(b) + f(ab) - f(a)b = 0\} =$$
$$= \mathrm{Der}(A^{\cdot}, M^{\cdot}) \tag{3.3.3}$$

s'identifie au module de dérivations de $A^{\cdot}$ à valeurs dans $M^{\cdot}$.

3.4. Soit $G^{\cdot}$ une algèbre de Poisson[1], et considérons son complexe de Hochschild $C_H^{\cdot}(G^{\cdot}, G^{\cdot})$. Considérons le crochet $[,] :\ G^{\cdot} \otimes G^{\cdot} \longrightarrow G^{\cdot}$ comme une cochaine de Hochschild $[,] \in C_H^2(G^{\cdot}, G^{\cdot})$. On a $\deg\, [,] = -1$, donc

$$|[,]| = 1$$

3.5. *Lemme.* $d_H[,] = 0$.

Dans la preuve, on utilisera l'identité de Poisson

$$[x, yz] = [x,y]z + (-1)^{|y|(|x|+1)} y[x,z] \tag{3.5.1}$$

et son companion

$$[xy, z] = x[y,z] + (-1)^{|y|(|z|+1)} [x,z]y \tag{3.5.2}$$

qui est une consésquence de (3.5.1) et de la commutativité.

On aura, en utilisant (3.3.2):

$$d_H[,](x,y,z) = (-1)^{|x|} x[y,z] + (-1)^{|x|+1} [xy, z] +$$
$$+(-1)^{|x|+|y|} [x, yz] + (-1)^{|x|+|y|+1} [x,y]z =$$
$$= (-1)^{|x|} x[y,z] + (-1)^{|x|+1} \{x[y,z] + (-1)^{|y|(|z|+1)} [x,z]y\} +$$
$$+(-1)^{|x|+|y|} \{[x,y]z + (-1)^{|y|(|x|+1)} y[x,z]\} + (-1)^{|x|+|y|+1} [x,y]z = 0,$$

qed.

3.6. *Rémarque.* Peut-être l'identité $d_H[,]=0$, i.e.

$$x[y,z]-[xy,z]+(-1)^{|y|}[x,yz]-(-1)^{|y|}[x,y]z=0$$

peut servir comme un remplacement de l'identité de Poisson pour les algèbres de Poisson[1] noncommutatives.

3.7. Pour

$$\Delta\in Hom^{-1}(G^{\cdot},G^{\cdot})\subset C^1(G^{\cdot},G^{\cdot})$$

on aura $|\Delta|=0$ et

$$d_H\Delta(x,y)=-x\Delta(y)+(-1)^{|x|}\Delta(xy)+(-1)^{|x|+1}\Delta(x)y,$$

cf. (3.3.1). Donc l'équation

$$d_H\Delta=[,] \tag{3.7.1}$$

est équivalente à

$$\Delta(xy)-\Delta(x)y-(-1)^{|x|}x\Delta(y)=(-1)^{|x|}[x,y],$$

i.e. au premier axiome (BV1) d'une algèbre BV, cf. 1.3 (Koszul dirai que Δ *engendre* le crochet $[,]$, cf. [K], p. 262).

3.8. Posons $A=G^0$, $T=G^1$. On a l'inclusion canonique d'algèbres de Poisson[1]

$$\Lambda^{\cdot}_A(T)\hookrightarrow G^{\cdot} \tag{3.8.1}$$

Évidemment, $Hom(T,A)$ fait partie de $Hom^{-1}(G^{\cdot},G^{\cdot})$; on a une projection canonique

$$\pi:\ Hom(G^{\cdot},G^{\cdot})\longrightarrow Hom(T,A)$$

qui se prolonge à une projection canonique des complexes de Hochschild

$$\pi:\ C_H^{\cdot -1}(G^{\cdot},G^{\cdot})\longrightarrow C^{\cdot}_H(T,A)$$

On rémarque que le dernier terme de la différentielle de Hochschild (3.2.1) disparaît dans $C^{\cdot}_H(T,A)$.

Par rapport à cette projection

$$\pi([,])=-e,$$

puisque $[a,\tau]=-\tau(a)$, et un opérateur Δ vérifiant (3.7.1) ira en $c\in Hom(T,A)$ vérifiant (CY1), $d_Hc=-e$.

§4. Complexe de de Rham d'une algèbre de Poisson[1]

4.1. Soient $\mathfrak{g}^{\cdot}$ une algèbre de Lie graduée et $M^{\cdot}$ un $\mathfrak{g}^{\cdot}$-module gradué. Le complexe de Chevalley $C^{\cdot}_{CH}(\mathfrak{g}^{\cdot},M^{\cdot})$ et défini par $C^n(\mathfrak{g}^{\cdot},M^{\cdot})=Hom(\Lambda^n\mathfrak{g}^{\cdot},M^{\cdot})$, avec la différentielle

$$d_{CH}f(x_1,\ldots,x_{n+1})=$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1+\tilde{x}_i(\tilde{f}+\sum_{p=1}^{i-1}\tilde{x}_p)} x_i f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots) +$$

$$+ \sum_{1\le i<j\le n+1} (-1)^{i+j+\tilde{x}_i\sum_{p=1}^{i-1}\tilde{x}_p+\tilde{x}_j\sum_{1\le q\le j-1, q\ne i}\tilde{x}_q} \times$$

$$\times f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots)$$

Si $N^{\cdot}$ est un autre $\mathfrak{g}^{\cdot}$-module gradué, $\mathfrak{g}^{\cdot}$ agit sur $Hom(M^{\cdot}, N^{\cdot})$ par la formule usuelle

$$(\tau\phi)(x) = \tau(\phi(x)) - (-1)^{\deg\,\phi\tilde{x}}\phi(\tau x)$$

4.2. Soit $G^{\cdot}$ une algèbre de Poisson[1]. On peut appliquer la définition précédente à l'algèbre de Lie graduée $G^{Lie\cdot} = G^{\cdot}[1]$ considérée comme le module adjoint sur lui-même et obtenir le complexe

$$C^{\cdot}_{CH}(G^{\cdot}, G^{\cdot}) := C^{\cdot}_{CH}(G^{Lie\cdot}, G^{Lie\cdot})$$

Plus explicitement, on aura

$$C^n_{CH}(G^{\cdot}, G^{\cdot}) = Hom(\Lambda^n(G^{\cdot}[1]), G^{\cdot}[1]) \subset$$

$$\subset Hom(G^{\cdot}[1])^{\otimes n}, G^{\cdot}[1]) = Hom(G^{\cdot\otimes n}, G^{\cdot})$$

Pour un élément homogène $f \in C^n_{CH}(G^{\cdot}, G^{\cdot})$, on désigne par $\tilde{f}$ son degré en tant qu'un élément de $Hom(G^{\cdot\otimes n}, G^{\cdot})$.

Pour un élément $x \in G^i$, son degré en tant qu'un élément de $G^{\cdot}[1]$ est $i-1$.

Donc, étant donnée une application $f:\ (G^{\cdot})^{\otimes n} \longrightarrow G^{\cdot}$ de degré $\tilde{f}$, son degré en tant qu'un élément de $Hom(G^{\cdot}[1])^{\otimes n}, G^{\cdot}[1])$ est égal à $\tilde{f}+n-1$.

On identifie $C^n_{CH}(G^{\cdot}, G^{\cdot})$ avec le module de fonctions polylinéaires $f:\ (G^{\cdot})^n \longrightarrow G^{\cdot}$ *alternées* en sens suivant:

$$f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= -(-1)^{(\tilde{x}_i-1)(\tilde{x}_{i+1}-1)} f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n) \tag{4.2.1}$$

La différentielle agit par la formule suivante: pour $f \in C^n_{CH}(G^{\cdot}, G^{\cdot})$,

$$d_{CH}f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} [x_i, f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots)] \times$$

$$\times (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)(\tilde{f}+n-1+\sum_{p=1}^{i-1}(\tilde{x}_p-1))} +$$

$$+ \sum_{1\le i<j\le n+1} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots) \times$$

$$\times (-1)^{i+j+(\tilde{x}_i-1)\sum_{p=1}^{i-1}(\tilde{x}_p-1)} \times$$

$$\times (-1)^{(\tilde{x}_j-1)\sum_{1\le q\le j-1,\ q\ne i}(\tilde{x}_q-1)} \tag{4.2.2}$$

Par exemple, pour $g \in G^\cdot$

$$d_{CH}g(x) = (-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{g}-1)}[x, g] = [g, x] \tag{4.2.3}$$

ou pour $f \in Hom(G^\cdot, G^\cdot)$

$$d_{CH}f(x, y) = [x, f(y)](-1)^{(\tilde{x}-1)\tilde{f}} -$$

$$-[y, f(x)](-1)^{(\tilde{y}-1)(\tilde{f}+\tilde{x}-1)} - f([x, y]) =$$

$$= (-1)^{(\tilde{x}-1)\tilde{f}}[x, f(y)] + [f(x), y] - f([x, y]) \tag{4.2.4}$$

On rémarque que $(d_{CH}f)^{\sim} = \tilde{f} - 1$.

4.3. On veut définir un bicomplexe $\{C^{ij}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot)\}$ avec $i \geq 0,\ j = 0, 1$.

La 0-ième ligne sera le complexe de Chevalley decalé:

$$C^{\cdot 0}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot) = C^{\cdot +1}_{CH}(G^\cdot, G^\cdot)$$

Par exemple, au coin on a

$$C^{00}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot) = Hom(G^\cdot, G^\cdot)$$

4.4. La première ligne est égale au complexe de Chevalley de $G^{Lie\cdot}$ à coefficients dans $C^2_H(G^\cdot, G^\cdot)$:

$$C^{\cdot 1}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot) = C^\cdot_{CH}(G^{Lie}, C^2_H(G^\cdot, G^\cdot)),\ n \geq 1$$

Plus précisement, on identifie $C^2_H(G^\cdot, G^\cdot)$ avec

$$Hom(G^{\cdot \otimes 2}, G^\cdot) = Hom((G^\cdot[1])^{\otimes 2}, G^\cdot[1]),$$

où le seconde terme possède la structure d'un G^{Lie}-module évidente.

On rémarque que l'on peut identifier

$$C^{m1}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot) = Hom(\Lambda^m(G^\cdot[1]) \otimes (G^\cdot[1])^{\otimes 2}, G^\cdot[1])$$

qui s'identifie au module de fonctions à $m + 2$ arguments

$$f(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, x_{m+2}) :\ (G^\cdot)^{m+2} \longrightarrow G^\cdot$$

qui sont alternées, en sens de (4.2.1), par rapport aux premiers m arguments.

4.5. Explicitement, la différentielle de Chevalley dans la première ligne

$$d_{CH} :\ C^{n-1,1}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot) = Hom(\Lambda^{n-1}(G^\cdot[1]) \otimes (G^\cdot[1])^{\otimes 2}, G^\cdot[1]) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Hom(\Lambda^n(G^\cdot[1]) \otimes (G^\cdot[1])^{\otimes 2}, G^\cdot[1]) = C^{n1}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot)$$

agit par la formule

$$d_{CH}f(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [x_i, f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots)] \cdot (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)[\tilde{f}+n+\sum_{p=1}^{i-1}(\tilde{x}_p-1)]} -$$

$$-f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots; [x_i, x_{n+1}], x_{n+2}) \cdot (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_{p=i+1}^{n}(\tilde{x}_p-1)} -$$

$$-f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots; x_{n+1}, [x_i, x_{n+2}]) \cdot (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_{p=i+1}^{n+1}(\tilde{x}_p-1)} +$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq n} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots; x_{n+1}, x_{n+2}) \times$$

$$\times (-1)^{i+j+(\tilde{x}_i-1)\sum_{p=1}^{i-1}(\tilde{x}_p-1)} \times$$

$$\times (-1)^{(\tilde{x}_j-1)\sum_{1\leq q\leq j-1,\ q\neq i}(\tilde{x}_q-1)} \tag{4.5.1}$$

Par exemple, pour $n = 1$:

$$d_{CH} f(x; y, z) = [x, f(y, z)](-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{f}+1)} -$$

$$-f([x, y], z) - f(y, [x, z])(-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1)} \tag{4.5.2}$$

(a) *Carré au coin*

4.6. Rappelons que

$$d_H = d_H^{00} :\ Hom(G^{\cdot}[1], G^{\cdot}[1]) \longrightarrow Hom((G^{\cdot}[1])^{\otimes 2}, G^{\cdot}[1])$$

agit par

$$d_H f(x, y) = (-1)^{\tilde{x}(\tilde{f}+1)+\tilde{f}} x f(y) +$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+1} f(xy) + (-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}} f(x) y,$$

cf. (3.3.1) (on a $|f| = \tilde{f} + 1$).

On définit

$$d_H = d_H^{10} :\ C_{HCH}^{10}(G^{\cdot}, G^{\cdot}) = Hom(\Lambda^2(G^{\cdot}[1]), G^{\cdot}[1]) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Hom((G^{\cdot}[1])^{\otimes 3}, G^{\cdot}[1]) = C_{HCH}^{11}(G^{\cdot}, G^{\cdot})$$

par la formule

$$d_H f(x, y, z) = (-1)^{\tilde{y}(\tilde{f}+\tilde{x}+1)+\tilde{f}+\tilde{x}} y f(x, z) +$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+\tilde{y}+1} f(x, yz) + (-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+\tilde{y}} f(x, y) z$$

4.7. *Lemme.* On a

$$d_{CH}^{01} d_H^{00} = d_H^{10} d_{CH}^{00}$$

En effet, rémarquons que $\deg(d_H f) = \tilde{f})$, d'où

$$d_{CH} d_H f(x, y, z) = (-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{f}+1)} [x, d_H f(y, z)] -$$

$$-d_H f([x,y],z) - (-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1)} d_H f(y,[x,z])$$

Ici

$$(-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{f}+1)}[x, d_H f(y,z)] =$$

$$= (-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{f}+1)} \Big\{ [x, yf(z)](-1)^{\tilde{y}(\tilde{f}+1)} +$$

(où

$$[x, yf(z)] = [x,y]f(z)\ (\alpha) + (-1)^{\tilde{y}(\tilde{x}-1)} y[x, f(z)]\ (6))$$

$$+[x, f(yz)](-1)^{\tilde{f}+\tilde{y}+1}\ (1)+$$

$$+[x, f(y)z](-1)^{\tilde{f}+\tilde{y}} \Big\}$$

(où

$$[x, f(y)z] = [x, f(y)]z\ (7) + (-1)^{(\tilde{f}+\tilde{y})(\tilde{x}-1)}) f(y)[x,z]\ (\beta))$$

Ensuite,

$$-d_H f([x,y],z) = (-1)^{(\tilde{x}+\tilde{y}+1)(\tilde{f}+1)+\tilde{f}+1}[x,y]f(z)\ (\alpha')+$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+\tilde{y}+1} f([x,y]z)\ (4)+$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+\tilde{y}} f([x,y])z\ (2)$$

Enfin,

$$-(-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1)} d_H f(y,[x,z]) =$$

$$= (-1)^{\tilde{x}\cdot\tilde{y}+\tilde{x}+\tilde{y}} \Big\{ (-1)^{\tilde{y}(\tilde{f}+1)+\tilde{f}} y f([x,z])\ (3)+$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\tilde{y}+1} f(y[x,z])\ (5)+$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\tilde{y}} f(y)[x,z]\ (\beta') \Big\}$$

On a $(\alpha) + (\alpha') = (\beta) + (\beta') = 0$.

4.8. De l'autre côté, on a $\deg(d_{CH} f) = \tilde{f} - 1$, donc

$$d_H d_{CH} f(x,y,z) = (-1)^{\tilde{y}(\tilde{f}+\tilde{x})+\tilde{f}+\tilde{x}+1} y d_{CH} f(x,z)+$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+\tilde{y}} d_{CH} f(x,yz) + (-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+\tilde{y}+1} d_{CH} f(x,y)z$$

Ici

$$(-1)^{\tilde{y}(\tilde{f}+\tilde{x})+\tilde{f}+\tilde{x}+1} y d_{CH} f(x,z) =$$

$$= (-1)^{\tilde{y}(\tilde{f}+\tilde{x})+\tilde{f}+\tilde{x}+1} y \Big\{ (-1)^{(\tilde{x}-1)\tilde{f}} y[x, f(z)]\ (6')-$$

$$-(-1)^{(\tilde{z}-1)(\tilde{f}+\tilde{x}-1)} y[z, f(x)]\ (\gamma) - yf([x,z])\ (3')$$

Ensuite,

$$(-1)^{\tilde{f}+\tilde{x}+\tilde{y}} d_{CH} f(x,yz) =$$

$$= (-1)^{\tilde f+\tilde x+\tilde y}\Big\{(-1)^{(\tilde x-1)\tilde f}[x,f(yz)]\ (1')-$$

$$-(-1)^{(\tilde y+\tilde z-1)(\tilde f+\tilde x-1)}[yz,f(x)]-$$

(où

$$[yz,f(x)] = y[z,f(x)]\ (\gamma') + (-1)^{\tilde z(\tilde f+\tilde x+1)}[y,f(x)]z\ (\delta))$$

$$-f([x,yz])\Big\}$$

(où

$$[x,yz] = [x,y]z\ (4') + (-1)^{\tilde y(\tilde x+1)}y[x,z]\ (5'))$$

Enfin,

$$(-1)^{\tilde f+\tilde x+\tilde y+1}d_{CH}f(x,y)z =$$

$$= (-1)^{\tilde f+\tilde x+\tilde y+1}\Big\{(-1)^{(\tilde x-1)\tilde f}[x,f(y)]z\ (7')-$$

$$-(-1)^{(\tilde y-1)(\tilde f+\tilde x-1)}[y,f(x)]z\ (\delta') - f([x,y])z\ (2')\Big\}$$

Alors $(\gamma)+(\gamma') = (\delta)+(\delta') = 0$.

Par contre, en comparant avec 4.7, on trouve les égalités $(1)=(1'),(2)=(2'),(3)=(3'),(4)=(4'),(5)=(5'),(6)=(6')$ et $(7)=(7')$, ce qui prouve le lemme.

(b) *Cas général*

4.9. Plus généralement, on définit

$$d_H:\ C^{n0}_{HCH}(G^\cdot,G^\cdot) = Hom(\Lambda^{n+1}(G^\cdot[1]),G^\cdot[1]) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Hom(\Lambda^n(G^\cdot[1])\otimes(G^\cdot[1])^{\otimes 2},G^\cdot[1]) = C^{n1}_{HCH}(G^\cdot,G^\cdot)$$

par la formule

$$d_Hf(x_1,\dots,x_n;x_{n+1},x_{n+2}) = (-1)^{\tilde x_{n+1}(\tilde f+\sum_1^n\ \tilde x_p+1)+\tilde f+\sum_1^n\ \tilde x_p}\times$$

$$\times x_{n+1}f(x_1,\dots,x_n,x_{n+2})+$$

$$+(-1)^{\tilde f+\sum_1^{n+1}\ \tilde x_p+1}f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}x_{n+2})+$$

$$+(-1)^{\tilde f+\sum_1^{n+1}\ \tilde x_p}f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})x_{n+2},$$

On rémarque que

$$(d_{CH}f)^\sim = \tilde f-1 \text{ et } (d_Hf)^\sim = \tilde f$$

4.10. Calculons le composé $d_H^{n0} d_{CH}^{n-1,0}$. Dans l'expression

$$d_H d_{CH} f(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2})$$

on aura les termes suivants:

$$(A):\ (-1)^{\tilde{x}_{n+1}(\tilde{f}+\sum_1^n \ \tilde{x}_p)+\tilde{f}+\sum_1^n \ \tilde{x}_p+1}\times$$

$$\times x_{n+1} d_{CH} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+2}) =$$

$$= (-1)^{\tilde{x}_{n+1}(\tilde{f}+\sum_1^n \ \tilde{x}_p)+\tilde{f}+\sum_1^n \ \tilde{x}_p+1}\times$$

$$\times x_{n+1}\Bigg\{\sum_{i=1}^n \ [x_i, f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, x_{n+2})] \ \times$$

$$\times(-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)[\tilde{f}+n-1+\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)]} \ (1)+$$

$$+[x_{n+2}, f(x_1, \dots, x_n)]\times$$

$$\times(-1)^{n+(\tilde{x}_{n+2}-1)[\tilde{f}+n-1+\sum_1^n(\tilde{x}_p-1)]} \ (\alpha) \ +$$

ensuite

$$+\sum_{1\le i<j\le n} \ f([x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n, x_{n+2})\times$$

$$\times(-1)^{i+j+(\tilde{x}_i-1)\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)+(\tilde{x}_j-1)\sum_{1\le q\le j-1, q\ne i}(\tilde{x}_q-1)} \ (2) \ +$$

$$+\sum_{i=1}^n \ f([x_i, x_{n+2}], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)\times$$

$$\times(-1)^{i+n+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)+(\tilde{x}_{n+2}-1)\sum_{1\le q\le n, q\ne i}(\tilde{x}_q-1)} \ (9) \ \Bigg\}$$

Ensuite,

$$(B):\ (-1)^{\tilde{f}+\sum_1^{n+1} \ \tilde{x}_p} d_{CH} f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}x_{n+2}) =$$

$$= (-1)^{\tilde{f}+\sum_1^{n+1} \ \tilde{x}_p}\Bigg\{\sum_{i=1}^n \ [x_i, f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, x_{n+1}x_{n+2})]\times$$

$$\times(-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)[\tilde{f}+n-1+\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)]} \ (6) \ +$$

$$+[x_{n+1}x_{n+2}, f(x_1, \dots, x_n)](-1)^{n+(\tilde{x}_{n+1}+\tilde{x}_{n+2}-1)(\tilde{f}+\sum_1^n \tilde{x}_p+1)}+$$

(où

$$[x_{n+1}x_{n+2}, f(x_1, \dots, x_n)] = x_{n+1}[x_{n+2}, f(x_1, \dots, x_n)] \ (\tilde{\alpha}) \ +$$

$$+[x_{n+1}, f(x_1, \dots, x_n)]x_{n+2}(-1)^{\tilde{x}_{n+2}(\tilde{f}+\sum_1^n \tilde{x}_p+1)}) \ (\beta)$$

ensuite

$$+\sum_{1\le i<j\le n} \ f([x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}x_{n+2})\times$$

$$\times(-1)^{i+j+(\tilde{x}_i-1)\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)+(\tilde{x}_j-1)\sum_{1,\ne i}^{j-1}(\tilde{x}_q-1)} \ (3) \ +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} f([x_i, x_{n+1}x_{n+2}], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)\times$$

$$\times(-1)^{i+n+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)+(\tilde{x}_{n+1}+\tilde{x}_{n+2}-1)\sum_{1,\neq i}^{n}(\tilde{x}_q-1)}\Bigg\}$$

(où

$$[x_i, x_{n+1}x_{n+2}] = [x_i, x_{n+1}]x_{n+2}\ (8) + (-1)^{\tilde{x}_{n+1}(\tilde{x}_i-1)}x_{n+1}[x_i, x_{n+2}]\ (7))$$

Enfin,

$$(C):\ (-1)^{\tilde{f}+\sum_1^{n+1}\ \tilde{x}_p+1}d_{CH}f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})x_{n+2} =$$

$$= (-1)^{\tilde{f}+\sum_1^{n+1}\ \tilde{x}_p+1}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n+1}[x_i, f(\dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})]\times$$

$$\times(-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)[\tilde{f}+n-1+\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)]}\ (5)\ +$$

$$+\sum_{1\leq i<j\leq n+1} f([x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots)\times$$

$$\times(-1)^{i+j+(\tilde{x}_i-1)\sum_1^{i-1}\ (\tilde{x}_p-1)+(\tilde{x}_j-1)\sum_{1,\neq i}^{j-1}\ (\tilde{x}_q-1)}\Bigg\}x_{n+2}$$

On rémarque tout de suite que $(\alpha) + (\tilde{\alpha}) = 0$ et que $\beta + (5)_{n+1} = 0$.

4.11. D'un autre côté, calculons le composé

$$d_{CH}^{n-1,1}d_H^{n-1,0}f(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2})$$

Il aura les termes suivants:

$$(A):\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)[\tilde{f}+n+\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times[x_i, d_H f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)[\tilde{f}+n+\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times\Bigg\{[x_i, x_{n+1}f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, x_{n+2})]\times$$

$$\times(-1)^{\tilde{x}_{n+1}(\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n}\ \tilde{x}_p+1)+\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n}\ \tilde{x}_p}+$$

(où

$$[x_i, x_{n+1}f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, x_{n+2})] = [x_i, x_{n+1}]f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, x_{n+2})\ (\delta)\ +$$

$$+x_{n+1}[x_i, f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, x_{n+2})](-1)^{\tilde{x}_{n+1}(\tilde{x}_i-1)}\ (1'))$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n+1}\ \tilde{x}_p+1}[x_i, f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, x_{n+1}x_{n+2})]\ (6')+$$

$$+(-1)^{\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n+1}\ \tilde{x}_p}[x_i, f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+1})x_{n+2}]\Big\}$$

(où

$$[x_i, f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+1})x_{n+2}] = [x_i, f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+1})]x_{n+2}\ (5')+$$

$$+f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+1})[x_i,x_{n+2}](-1)^{(\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n+1}\ \tilde{x}_p)(\tilde{x}_i-1)}\ (\gamma))$$

Ensuite,

$$(B):\ -\sum_{i=1}^{n}\ (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_{i+1}^{n}\ (\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times d_H f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,[x_i,x_{n+1}],x_{n+2}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\ (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_{i+1}^{n}\ (\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times\Big\{[x_i,x_{n+1}]f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+2})\times$$

$$\times(-1)^{(\tilde{x}_i+\tilde{x}_{n+1}-1)(\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n}\ \tilde{x}_p+1)+\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n}\ \tilde{x}_p}\ (\tilde{\delta})\ +$$

$$+f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,[x_i,x_{n+1}]x_{n+2})(-1)^{\tilde{f}+\sum_{1}^{n+1}\ \tilde{x}_p}\ (8')+$$

$$+f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,[x_i,x_{n+1}])x_{n+2}(-1)^{\tilde{f}+\sum_{1}^{n+1}\ \tilde{x}_p+1}\ (4'')\ \Big\}$$

Ensuite,

$$(C):\ -\sum_{i=1}^{n}\ (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_{i+1}^{n+1}\ (\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times d_H f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+1},[x_i,x_{n+2}]) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\ (-1)^{i+1+(\tilde{x}_i-1)\sum_{i+1}^{n+1}\ (\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times\Big\{x_{n+1}f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,[x_i,x_{n+2}])\times$$

$$\times(-1)^{\tilde{x}_{n+1}(\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n}\tilde{x}_p+1)+\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n}\tilde{x}_p}\ (9')+$$

$$+f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+1}[x_i,x_{n+2}])(-1)^{\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n+1}\tilde{x}_p+1}\ (7')+$$

$$+f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n,x_{n+1})[x_i,x_{n+2}](-1)^{\tilde{f}+\sum_{1,\neq i}^{n+1}\tilde{x}_p}\ (\tilde{\gamma})\ \Big\}$$

Enfin,

$$(D)\ \sum_{1\leq i<j\leq n}\ (-1)^{i+j+(\tilde{x}_i-1)\sum_{1}^{i-1}(\tilde{x}_p-1)+(\tilde{x}_j-1)\sum_{1,\neq i}^{j-1}(\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times d_H f([x_i,x_j],x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_n;x_{n+1},x_{n+2}) =$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{i+j+(\tilde{x}_i-1)\sum_1^{i-1}(\tilde{x}_p-1)+(\tilde{x}_j-1)\sum_{1,\neq i}^{j-1}(\tilde{x}_p-1)}\times$$

$$\times\Big\{ x_{n+1}f([x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n,x_{n+2})\times$$

$$\times(-1)^{\tilde{x}_{n+1}(\tilde{f}+\sum_1^n\tilde{x}_p)+\tilde{f}+\sum_1^n\tilde{x}_p+1}\ (2')\ +$$

$$+f([x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n,x_{n+1}x_{n+2})(-1)^{\tilde{f}+\sum_1^{n+1}\tilde{x}_p}\ (3')\ +$$

$$+f([x_i,x_j],x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n,x_{n+1})x_{n+2}(-1)^{\tilde{f}+\sum_1^{n+1}\tilde{x}_p+1}\ (4')\ \Big\}$$

Alors on aura $(\delta)+(\tilde{\delta})=(\gamma)+(\tilde{\gamma})=0$; ensuite, $(5)_{\le n}=(5')$, $(4)=(4')+(4'')$ et $(i)=(i')$ pour $i=1,2,3,6,7,8,9$, ce qui prouve le

4.12. *Lemme.* Pour tous $n\ge 0$, on a $d_H^{n0}d_{CH}^{n-1,0}=d_{CH}^{n-1,1}d_H^{n-1,0}$.

(c) *Complexe de de Rham*

4.13. Définissons

$$\Omega^n(G\cdot)^\sim=\mathrm{Ker}(d_H:\ C_{HCH}^{n-1,0}(G^\cdot)\longrightarrow C_{HCH}^{n-1,1}(G^\cdot)),\ n\ge 1;$$

$\Omega^0(G\cdot)^\sim=G^\cdot$. Explicitement,

$\Omega^n(G\cdot)^\sim$ s'identifie au module des applications polylinéaires

$$f:\ G^{\cdot n}\longrightarrow G^\cdot$$

qui:

(a) sont alternées, i.e.

$$f(x_1,\dots,x_n)=(-1)^{(\tilde{x}_i-1)(\tilde{x}_{i+1}-1)}f(x_1,\dots,x_{i+1},x_i,\dots,x_n)$$

(b) satisfont à l'identité

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},yz)=$$

$$=(-1)^{y(\tilde{f}+\sum_1^{n-1}\tilde{x}_p)}yf(x_1,\dots,x_{n-1},y)+f(x_1,\dots,x_{n-1},y)z$$

Par exemple,

$$\Omega^1(G^\cdot)^\sim=\mathrm{Der}(G^\cdot,G^\cdot):=\{f\in Hom(G^\cdot,G^\cdot)|\ f(xy)=(-1)^{\tilde{x}\tilde{f}}xf(y)+f(x)y\}$$

Grace à 4.12, la différentielle de Chevalley induit une différentielle $d_{DR}:\ \Omega^n(G^\cdot)\longrightarrow\Omega^{n+1}(G^\cdot)$, $n\ge 1$.

Par contre, rappelons la différentielle $d_{CH}:\ G^\cdot\longrightarrow Hom(G^\cdot,G^\cdot)$ definie par $d_{CH}g(x)=[g,x]$, cf. 4.2.3. On a $(d_{CH}g)^\sim=\tilde{g}-1$ et l'on vérifie aussitôt que $d_{CH}g\in\mathrm{Der}(G^\cdot,G^\cdot)$, donc d_{CH} induit une application

$$d_{DR}:\ G^\cdot=\Omega^0(G^\cdot)^\sim\longrightarrow\Omega^1(G^\cdot)^\sim=\mathrm{Der}(G^\cdot,G^\cdot),\ d_{DR}g(x)=[g,x],$$

d'où *le grand complexe de de Rham* de $G^\cdot$, $\Omega^\cdot(G^\cdot)^\sim$.

La-dédans, on définit un sous-complexe $\Omega^\cdot(G^\cdot) \subset \Omega^\cdot(G^\cdot)^\sim$, *le petit complexe de de Rham* de $G^\cdot$, par

$$\Omega^0(G^\cdot) = G^0;\ \Omega^n(G^\cdot) = \{f \in \Omega^n(G^\cdot)^\sim | \tilde{f} = -n\}$$

4.14. Supposons que $G^\cdot = \Lambda^\cdot_A(T)$ est l'algèbre de Schouten - Nijenhuis d'une A-algébroïde de Lie T. On a $\Omega^0(\Lambda^\cdot_A(T)) = A$.

Une dérivation de degré -1 $\omega \in \Omega^1(\Lambda^\cdot_A(T)) = \mathrm{Der}^{-1}(\Lambda^\cdot_A(T), \Lambda^\cdot_A(T))$ est uniquement définie par ses valeurs sur T, $\omega(\tau) \in A$. La condition d'une dérivation se récrit pour $a \in A,\ \tau \in T$ comme $\omega(a\tau) = a\omega(\tau)$, i.e.

$$\Omega^1(\Lambda^\cdot_A(T)) = Hom_A(T, A) = \Omega^1(T)$$

De même, une bidérivation $\Omega \in \Omega^2(\Lambda^\cdot_A(T))$ est uniquement définie par ses valeurs $\omega(\tau, \tau') \in A,\ \tau, \tau' \in T$, et l'axiome (b) signifie que ω est A-linéaire par rapport à τ', donc aussi par rapport à τ, puisque ω est alternée, d'où $\Omega^2(\Lambda^\cdot_A(T)) = Hom_A(\Lambda^2 T, A) = \Omega^2(T)$. Plus généralement, $\Omega^n(\Lambda^\cdot_A(T))$ s'identifie avec $\Omega^n(T)$ pour tous n.

D'autre part, pour $\omega \in \Omega^1(\Lambda^\cdot_A(T))$ et $\tau, \tau' \in T$ on a (cf. (4.2.4)):

$$d_{DR}\omega(\tau, \tau') = d_{CH}\omega(\tau, \tau') = [\tau, \omega(\tau')] - [\tau', \omega(\tau)] - \omega([\tau, \tau']) =$$

$$= \tau(\omega(\tau')) - \tau'(\omega(\tau) - \omega([\tau, \tau'])$$

Plus généralement, la différentielle de de Rham dans $\Omega^\cdot(\Lambda^\cdot_A(T))$ s'identifie avec la différentielle de de Rham dans $\Omega^\cdot(T)$.

En particulier, le sous-module de formes fermées

$$\Omega^{1,\mathrm{fer}}(\Lambda^\cdot_A(T)) = \Omega^{1,\mathrm{fer}}(T)$$

§5. Structures de Calabi - Yau

5.1. Soit $G^\cdot$ une algèbre de Poisson[1]. Considérons la crochet

$$[,] \in Hom(G^{\cdot\otimes 2}, G^\cdot) = C^{01}_{CHC}(G^\cdot, G^\cdot),\ \widetilde{[,]} = -1$$

On a vu dans 3.4 que $d_H[,] = 0$.

D'un autre part (cf. (4.5.2)),

$$d_{CH}[,](x, y, z) = [x, [y, z]] - [[x, y], z] - (-1)^{(\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1)}[y, [x, z]] = 0,$$

i.e. $d_{CH}[,] = 0$ aussi.

5.2. Soit $\Delta \in Hom(G^\cdot, G^\cdot)$ un élément de degré -1 tel que

$$d_H \Delta = [,],$$

i.e. (cf. 3.7)

$$[x,y] = (-1)^{\tilde{x}}\{\Delta(xy) - \Delta(x)y - (-1)^{\tilde{x}} x\Delta(y)\} \tag{5.2.1}$$

Calculons $d_{CH}\Delta$ (cf. (4.2.4)):

$$d_{CH}\Delta(x,y) = (-1)^{\tilde{x}-1}[x,\Delta(y)] - (-1)^{(\tilde{y}-1)\tilde{x}}[y,\Delta(x)] - \Delta([x,y]) =$$

$$= -\Big\{\Delta(x\Delta(y)) - \Delta(x)\Delta(y) - (-1)^{\tilde{x}} x\Delta^2(y)\Big\} -$$

$$-(-1)^{(\tilde{y}-1)\tilde{x}+\tilde{y}}\Big\{\Delta(y\Delta(x)) - \Delta(y)\Delta(x) - (-1)^{\tilde{y}} y\Delta^2(x)\Big\} -$$

$$-(-1)^{\tilde{x}}\Big\{\Delta^2(xy) - \Delta(\Delta(x)y) - (-1)^{\tilde{x}}\Delta(x\Delta(y))\Big\} =$$

$$= (-1)^{\tilde{x}+1}\{\Delta^2(xy) - \Delta^2(x)y - x\Delta^2(y)\}$$

Rémarquons que

$$(-1)^{(\tilde{y}-1)\tilde{x}}[y,\Delta(x)] = [\Delta(x), y]$$

Ainsi:

5.3. *Lemme.* Si $\Delta \in Hom(G^\cdot, G^\cdot)$, $\Delta^\sim = -1$ vérifie $d_H\Delta = 0$, alors

$$d_{CH}\Delta(x,y) = (-1)^{\tilde{x}+1}\{\Delta^2(xy) - \Delta^2(x)y - x\Delta^2(y)\}$$

5.4. *Une structure de Calabi - Yau* sur $G^\cdot$ est un élément $\Delta \in Hom(G^\cdot, G^\cdot)$ de degré -1 tel que $d_H\Delta = [,]$ et $d_{CH}\Delta = 0$, i.e.

$$\Delta(xy) - \Delta(x)y - (-1)^{\tilde{x}} x\Delta(y) = (-1)^{\tilde{x}}[x,y] \tag{$CY1$}$$

et

$$\Delta([x,y]) = [\Delta(x), y] + (-1)^{\tilde{x}-1}[x,\Delta(y)], \tag{$CY2$}$$

i.e. Δ est une dérivation de l'algèbre de Lie $G^{\cdot Lie} = G^\cdot[1]$.

D'après 5.3, (CY2) est équivalent à

$$\Delta^2(xy) = \Delta^2(x)y + x\Delta^2(y) \tag{$CY2$}'$$

i.e. Δ^2 est une dérivation de l'algèbre associative $G^\cdot$.

On voit que c'est une condition plus faible que l'axiome de Bataline - Vilkovisky, $\Delta^2 = 0$, cf. [K], §1.

5.5. D'après §4, (a), l'ensemble $CY(G^\cdot)$ de structures CY sur $G^\cdot$ est un torseur sous

$$H^0(\mathrm{Tot}C^{\cdot\cdot}_{HCH}(G^\cdot, G^\cdot)) = \mathrm{Ker}(d_H^{00}) \cap \mathrm{Ker}(d_{CH}^{00}) = \Omega^{1,\mathrm{fer}}(G^\cdot)$$

Pour $G^{\cdot} = \Lambda^{\cdot}_A(T)$ le $\Omega^{1,\mathrm{fer}}(G^{\cdot})$-torseur $CY(G^{\cdot})$ s'identifie au $\Omega^{1,\mathrm{fer}}(T)$-torseur $CY(T)$.

5.6. *Rémarques.* (a) Considérons le crochet comme un élément $\omega \in C^{10}_{HCH}(G^{\cdot}, G^{\cdot}) = Hom(\Lambda^2(G^{\cdot}[1]), G^{\cdot})[1]$, $\omega(x,y) = [x,y]$.

Si $I \in C^{00}_{HCH}(G^{\cdot}, G^{\cdot}) = Hom(G^{\cdot}[1], G^{\cdot}[1])$ est le morphisme d'identité, alors $\omega = d_{CH}I$, d'où $d_{CH}\omega = 0$.

Ensuite,

$$d_H\omega(x,y,z) = (-1)^{\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}+1}y[x,z] + (-1)^{\tilde{x}+\tilde{y}}[x,yz] + (-1)^{\tilde{x}+\tilde{y}+1}[x,y]z = 0,$$

i.e. $d_H\omega = 0$. Donc $\omega \in \Omega^2(G^{\cdot})^{\sim}$ (il n'appartient pas à $\Omega^2(G^{\cdot})$ car $\tilde{\omega} = -1$), et $d_{DR}b = 0$.

Par contre,

$$d_H I(x,y) = (-1)^{\tilde{x}}xy,$$

donc ω n'est pas un cobord dans $\Omega^2(G^{\cdot})^{\sim}$.

(b) Si l'on définit $m \in C^{01}(G^{\cdot}, G^{\cdot})$ par $m = d_H I$, i.e.

$$m(x,y) = (-1)^{\tilde{x}}xy$$

alors $d_H m = 0$ et

$$d_{CH}m = d_{CH}d_H I = d_H d_{CH} I = d_H b = 0$$

5.7. Il y a peu de doute que le contenu de [DN], Caput 2 se généralise aussi au cadre des algèbres de Poisson[1], d'où une notion d'une *structure vertex* sur une algèbre de Poisson[1]. Ces structures devraient former un 2-torseur sous le complexe de de Rham tronqué $\Omega^2(G^{\cdot}) \longrightarrow \Omega^{3,\mathrm{fer}}(G^{\cdot})$.

Il serais intéressant de comprendre la nature des algèbres "vertex Poisson[1]" enveloppantes correspondantes. Cela n'est pas immédiat, à cause du dernier terme de la différentielle de Hochschild, qui ne soit pas vu au cadre des algébroïdes vertex.

Bibliographie

[BD] A.Beilinson, V.Drinfeld, Chiral algebras, AMS Colloquium Publications, **51**, 2004.

[GMS] V. Gorbounov, F. Malikov, V. Schechtman, Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids, Inv. Math., **155**, 605 - 680 (2004).

[K] J.-L. Koszul, Crochet de Schouten - Nijenhuis et cohomologie, pp. 257 - 271 dans: Astérisque, hors série, 1985, tome dédié à E. Cartan, 1985.

[S] V. Schechtman, Remarks on formal deformations and Batalin - Vilkovisky algebras, math.AG/9802006.

[DN] V. Schechtman, Definitio nova algebroidis verticiani, pp. 443 - 494 dans: Studies in Lie theory: A.Joseph Festschrift, Birkhäuser, Progress in Math., **243**, 2006.

[TT] D. Tamarkin, B. Tsygan, The ring of differential operators on forms in noncommutative calculus, pp. 105 132 dans: Graphs and Patterns in Mathematics and Theoretical Physics: D.Sullivan Festschrift, Proc. Symp Pure Math., **73**, AMS, 2005.